Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 3.
Lineære ligningssystemer. Echelon-matricer. Parameterfremstilling for løsningsmængden.

Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Et lineært ligningssystem (m ligninger i n ubekendte) med koefficientmatrix A og højresiden $\mathbf{b}$ svarer til matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og vi vil gerne finde alle løsningsvektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Til dette formål sætter vi løsning af lineære ligningssystemer vha. rækkeoperationer helt i system.
Gauss-algoritme: Det gøres ved den såkaldte rækkereduktionsalgoritme (eller Gauss-algoritme). Ved at arbejde sig systematisk gennem søjlerne fra venstre til højre opnår man

- ved rækkeombytninger: at ledende koefficienter optræder længst muligt til venstre;
- og ved rækkeadditioner("erstatninger"): at der kun står 0-taller under en ledende koefficient i hver Pivotsøjle.

Efter et antal operationer ender man med en (rækkeækvivalent) matrix på echelonform. Søjler med Pivotpositioner (skal indeholde en ledende koefficient) kaldes Pivotsøjler; de tilsvarende variable er bundne[1]; evt. resterende variable er frie[2] variable.

Det kan som regel betale sig at fortsætte med flere rækkeoperationer for at nå frem til en matrix på reduceret echelonform (som iøvrigt er entydigt bestemt ud fra den oprindelige matrix). Det opnås med den såkaldte Gauss-Jordan algoritme. Her sørger man – ved rækkemultiplikationer – for at alle Pivotelementer normeres til 1-taller og – ved rækkeadditioner – at der kun står 0-taller også over disse Pivotpositioner.

Antallet af Pivotsøjler i echelonmatricen kaldes rangen[3] – af både echelonmatricen og af den oprindelige $m \times n$-matrix. Desuden tales om matricens defekt eller korang[4]: $rank(A) + nullity(A) = n$ = antal søjler i A. Rangen svarer til antallet af bundne variable, defekten til antallet af frie variable.

Om løsningsmængden af systemet givet ved $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved man nu:

1. Systemet har en løsning (er konsistent) hvis koefficientmatricen A og totalmatricen $[A|\ \mathbf{b}]$ har den samme rang. Det betyder nemlig, at man ved rækkereduktion aldrig kommer frem til en ledende koefficient i højresiden.
2. Hvis systemet er konsistent og hvis koefficientmatricens rang er n (maximal) og dermed defekten 0 (minimal), så har systemet netop én løsning.
3. Hvis systemet er konsistent og hvis koefficientmatricens rang er mindre end n og dermed defekten større end

[1] på engelsk: basic
[2] eng.: free
[3] eng.: rank
[4] eng.: nullity

0, så har systemet uendelig mange løsninger.

Litteratur:

(SIF) ch. 1.4, pp. 45 – 50.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

SIF, ch. 1.3, pp. 38 – 40 29, 45, 47, 49, 41, 53, 57 – 76.

SIF, ch. 1.4, pp. 52 – 54 5, 9, 15.

Forelæsningens 2. del:

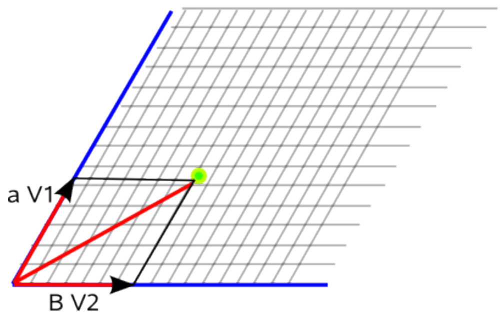
kl. 11:25 – 12 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Nu skal vi til at knytte en række begreber fra den geometriske og den algebraiske verden sammen:

1. linearkombinationer og spænd (geometri)
2. vektorligninger (algebra)
3. matrixligninger og (algebra)
4. (de kendte) lineære ligningssystemer (algoritme=regnemetode).

Spænd: Mængden af alle linearkombinationer $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$ med reelle koefficienter (eller vægte) af et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ i $\mathbf{R}^n$ kaldes vektorernes spænd[5] $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} \subset \mathbf{R}^n$.
Spændet har følgende geometriske interpretation: Spændet af én vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ svarer til vektorerne på en ret linie med retningsvektor $\mathbf{v}$ gennem Origo. Spændet af to vektorer svarer typisk, men ikke altid, til en plan gennem Origo (og ikke, hvad mange fejlagtigt tror, til det område "mellem" de to vektorer; det drejer sig om en hel plan!)



Vektorligninger: Er en given vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ indeholdt i spændet $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_p\}$? Svaret findes ved at løse en vektorligning $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$, eller et ækvivalent lineært ligningssystem hvis totalmatrix har søjler $[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p \mid \mathbf{b}]$. Vektoren er indeholdt i spændet hvis og kun hvis dette ligningssystem er konsistent.

Hvornår er spændet af p vektorer i $\mathbf{R}^m$ lig med hele rummet $\mathbf{R}^m$? For at teste dette, indsætter man vektorerne som søjlevektorer i matricen $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p]$.

[5] eng.: span

Hvis rangen for denne matrix opfylder $rank(A) = m$ – en Pivotposition i hver række, så kan man løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for enhver højreside $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ – og ellers ikke!

Litteratur:

- (SIF) ch. 1.5, pp. 66 – 70.
- Linear span

Næste gang:

Mandag, den 13.9., kl. 12:30 – 16:15.
Introduktion til Rhino.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G | 9940 8855 | RAUSSEN@MATH.AAU.DK
9220 AALBORG ØST | - | PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN