Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 3.
Multiplikation af matricer.
Sammensætning af lineære afbildninger.

Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Surjektivitet, injektivitet, nulrum:
Vi kan bruge matrix præsentationen til at afgøre om en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er surjektiv (på)[1], hhv. injektiv.

- T er surjektiv, hvis hver vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ ligger i billedet af T: der findes mindst en vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ med $T(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$.
  En projektion er surjektiv.
- T er injektiv, hvis der til enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ findes højst en vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ med $T(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$.

Beskrives afbildningen T ved en $(m \times n)$-matrix A, så er kravene for

surjektivitet at matricens søjler udspænder $\mathbf{R}^m$; matricen har rang m

injektivitet at matricens søjler skal være lineært uafhængige; matricen har rang n.

Dette kan checkes ved at se efter om der er Pivotpositioner i hver række (surjektivitet), hhv. i hver søjle (injektivitet).

Særskilt væsentlig er Ts nulrum, som består af alle vektorer $\mathbf{x}$ som opfylder $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Hvis T har standardmatricen A, så findes nulrummet som løsningsmængde til det homogene ligningssystem givet ved $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Afbildningen T er injektiv hvis og kun hvis denne nulrum kun indeholder vektoren $\mathbf{0}$ og ikke andre.

Litteratur:

(SIF) ch. 2.8, pp. 180 – 185.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i Auditorium 3[2].

Opgaver:

SIF, 2.1, pp. 104 – 106 33 – 50, 59, 63[3]

SIF, 2.8, pp. 188 – 192 25, 33, 27, 35, 61.

[1] eng.: onto
[2] Der er ingen strøm i grupperummene!
[3] Prøv med 2×2-matricer som hver især indeholder et 1-tal og ellers kun 0-taller.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G 9940 8855 RAUSSEN@MATH.AAU.DK
9220 AALBORG ØST - PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN

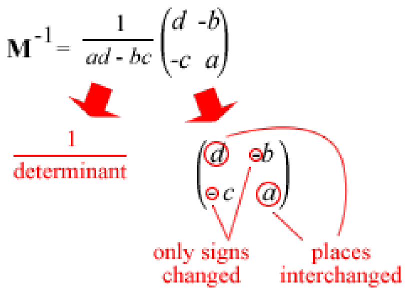
Forelæsningens 2. del:

kl. 11:25 – 12 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Inverse afbildninger og matricer: I det følgende koncentrerer vi os om kvadratiske matricer med samme antal søjler som rækker. Hvis A er en $(n \times n)$-matrix, har den så en invers matrix C, således at $AC = CA = I \leftarrow$ enhedsmatrix?
Det betyder at den lineære afbildning svarende til A har en invers lineær afbildning; specielt er begge disse afbildninger så både injektive og surjektive.

Det gælder for mange matricer A, men ikke for dem allesammen. For (2×2)-matricer finder man nemt en formel for den inverse matrix A^{-1}, hvis matricen A opfylder: $\det A \neq 0$ (og hvis $\det A = 0$ så er A ikke invertibel!)



Generelt gælder det at matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ altid har netop én løsning når A er invertibel. Hvorfor?

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Konklusion: En $n \times n$- matrix A er invertibel netop når alle søjler (og dermed alle rækker) har en Pivot-position, dvs. hvis A har rang n.

Litteratur:

(SIF) ch. 2.3, pp. 122 – 125; ch. 2.8, pp. 187 – 188.

Næste gang:

Mandag, 25.10, kl. 12:30 – 16:15.
Grasshopper om matrixoperationer og deres geometriske betydning.