Lineære transformationer i A&D 2. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

6.9.2010

Uligheder

Cauchy-Schwarz $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|$

Trekant $\| \mathbf{u}+\mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|$

Ortogonalprojektion og afstand

Givet en linje l ved retningsvektor $\mathbf{v}$ og en vektor $\mathbf{u}$.
Ønskes: $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}, \ \mathbf{w} \| \mathbf{v}, \mathbf{z} \perp \mathbf{v}$.
Løsning: $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}; \ \mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$.
Afstand fra P i spidsen af $\mathbf{u}$ til l: $\| \mathbf{z} \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{w} \|$.

Linearkombinationer. Spænd

Givet et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
En vektor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n,\ c_i \in \mathbf{R}$, kaldes en linearkombination af vektorerne $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
Vektorernes spænd er mængden af alle deres linearkombinationer:

$$Span\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} := \{c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p |\ c_i \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n.$$

Eksempler:

1. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow Span\{\mathbf{a}\} = \{c\mathbf{a} |\ c \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$
   vektorer på en linje gennem Origo med retning $\mathbf{a}$.
2. $Span\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 |\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$
   vektorer i en plan med retningsvektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$
   – med mindre $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ligger på én linie.

Bemærk: en hel plan, ikke bare en oktant!

Matrix gange vektor
Definition

A en $m \times n$-matriks, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \rightsquigarrow A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$.

$$A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

er linearkombinationen af As søjlevektorer $\mathbf{a}_i$ med vægte x_i.

Den i-te indgang (koefficient) i vektoren $A\mathbf{x}$:

$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n =$

prikprodukt $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ \cdots \\ a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ mellem As i-te rækkevektor og $\mathbf{x}$.

Matrix gange vektor

Egenskaber

1. $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
2. $A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$
3. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$
4. $(A+B)\mathbf{u} = A\mathbf{u} + B\mathbf{u}$
5. $O\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$
6. $I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$
7. $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$ – den j-te søjlevektor
8. $B\mathbf{w} = A\mathbf{w}$ for alle vektorer $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n \Rightarrow B = A$