Lineære transformationer i A&D 4. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

9.9.2010

Rækkereduktion til echelonform

Gauss-algoritmen (forlæns)

Algoritmen (regnemetoden) går igennem matricens søjler fra venstre til højre. Den bruger

r-ombytning for at opnå at ledende koefficienter længst vil venstre optræder i rækken lige under den sidst opnåede Pivotposition

r-addition for at opnå at der kun står 0-taller under denne ledende koefficient.

I hver søjle: højst en ombytning, men ofte flere additioner.
Resultat: En rækkeækvivalent matrix på echelonform.

Rækkereduktion til reduceret echelonform

Gauss-Jordan-algoritmen (baglæns)

Algoritmen fortsætter fra en matrix på echelonform. Den går igennem Pivotelementer fra venstre til højre og bruger

r-multiplikation for at opnå at Pivotelementet bliver 1.

r-addition for at opnå at der også står 0-taller over Pivotelementet.

Resultat: Den rækkeækvivalente matrix på reduceret echelonform.

Ligningssystemet svarende til en matrix på reduceret echelonform løses nemt ved at isolere de bundne variable (svarende til Pivotsøjler).

Løsningsmængden L for et lineært ligningssystem I

"The general solution"

Løsningsmængden beskriver alle løsninger:
$L = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n | \; x_1, \dots x_n \text{ opylder alle } m \text{ ligninger}\} \subset \mathbf{R}^n$

- Hvis en rækkeækvivalent echelonmatrix indeholder en række på formen $[00 \cdots 0|c]$ med $c \neq 0$, så er systemet inkonsistent – ingen løsning – $L = \emptyset$.
- Hvis ikke, så svarer hver Pivotsøjle (som indeholder en ledende koefficient) til en bunden variabel og hver af de andre til en fri variabel.
- Er der kun bundne variable, så har systemet en entydig løsning – L har netop ét element $[x_1, \cdots, x_n]$.
  Denne løsning findes umiddelbart ud fra den reducerede echelonmatrix.

Løsningsmængden L for et lineært ligningssystem II

Frie variable – bundne variable

- Frie variable kan antage vilkårlige reelle tal som værdier, uafhængigt af hinanden.
- De bundne variable udtrykkes som linearkombinationer af de frie – ved substitution med udgangspunkt i echelonmatrix.
  Resultat: en parameterfremstilling for løsningsmængden L.
- L har uendelig mange løsninger hvis et konsistent system giver anledning til en eller flere frie variable (søjler uden Pivot).

Fra ligningssystem til løsningsmængde
Trin for trin

1. Overfør ligningssystemet til (udvidet) matrix
2. Rækkereduktion $\rightsquigarrow$ matrix på echelonform
   1. Er højresiden en Pivotsøjle (er der en ledende koefficient i sidste søjle)? Systemet er inkonsistent. Stop!
   2. Ellers er systemet konsistent. Fortsæt!
3. Rækkereduktion $\rightsquigarrow$ matrix på reduceret echelonform.
4. Overfør denne sidste matrix til et (ækvivalent) ligningssystem
5. Isoler bundne variable $\rightsquigarrow$ parameterfremstilling med de frie variable som parametre

Linearkombinationer. Spænd

Givet et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
En vektor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n, \; c_i \in \mathbf{R}$, kaldes en linearkombination af vektorerne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
Vektorernes spænd er mængden af alle deres linearkombinationer:

$$Span\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} := \{c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p | \; c_i \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n.$$

Eksempler:

1. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow Span\{\mathbf{a}\} = \{c\mathbf{a} | \; c \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$
   vektorer på en linie gennem Origo med retning $\mathbf{a}$.
2. $Span\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 | \; c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$
   vektorer i en plan med retningsvektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$
   – med mindre $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ligger på én linie.

Bemærk: en hel plan, ikke bare en oktant!

Spænd. Vektor -og matrixligninger. Ligningssystemer

Spænd $\mathbf{b} \in Span\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} \Leftrightarrow$

Vektorligningen $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$ har en løsning $x_1, \dots, x_p \Leftrightarrow$

Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsningsvektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^p \Leftrightarrow$
(A er matricen med søjlevektorer $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$)

Ligningssystemet med udvidet matriks $[A|\ \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p|\ \mathbf{b}]$ er konsistent.

Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

En løsning $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ til matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med matrix $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ svarer til

- en løsning af vektorligningen $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$
- en løsning af det lineære ligningssystem med totalmatrix $[A \mid \mathbf{b}]$.

Matrixligningen har en løsning for alle vektorer $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ hvis og kun hvis

- Ligningssystemet med totalmatrix $[A \mid \mathbf{b}]$ har en løsning for alle $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$
- der efter en rækkereduktion af koefficientmatricen A findes Pivoter i hver række
- $\text{rang} A = m$.