Lineære transformationer i A&D 10. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

18.10.2010

Lineære afbildninger

En afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ fra definitionsmængden $\mathbf{R}^n$ ind i dispositionsmængden $\mathbf{R}^m$ “spiser” n-vektorer og “afleverer” m-vektorer.

En sådan afbildning kaldes lineær, hvis den opfylder

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$;
- $T(\mathbf{c}u) = cT(\mathbf{u})$ for alle $c \in \mathbf{R}, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$;

dvs., hvis T bevarer linearkombinationer.

En lineær afbildning opfylder altid: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

En projektion fra rummet ind i planen er en afbildning fra $\mathbf{R}^3$ ind i $\mathbf{R}^2$. Nogle af dem (f.eks. en opstalt) er lineære.

Lineære afbildnigner

- overfører rette linjer i rette linjer
- bevarer proportioner

Matriks gange vektor som lineær afbildning

- Givet en $(m \times n)$-matriks A. Så er afbildningen $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ givet ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en lineær afbildning.
- Enhver lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ kan på entydig vis beskrives som matriksafbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for en passende $(m \times n)$-matriks A.

Eksempler:

- Rotation (Drejning) i plan og rum
- Dilation (zoom, strækning), kontraktion i plan og rum
- Projektion fra rum til plan, fra plan til linie

Modeksempel:

- Translation (parallelforskydning)

Standardmatrix for en lineær afbildning

Opskrift

Standard enhedsvektorer $\mathbf{e}_i = [0,\dots,0,1,0,\dots,0] \in \mathbf{R}^n$ med et enkelt 1-tal i position i generaliserer vektorerne $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1, \mathbf{j} = \mathbf{e}_2$ og $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$.

Enhver vektor er linearkombination af standard enhedsvektorer:

$$\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Til en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ svarer en (standard) matrix A som opfylder $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$.

A er en $(m \times n)$-matrix.

Opskrift: $A = [T(\mathbf{e}_1),\dots,T(\mathbf{e}_n)]$:

As søjler = billeder $T(\mathbf{e}_i)$ af standard enhedsvektorerne $\mathbf{e}_i$ under T.

Hvorfor? $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \Rightarrow$

$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) = A\mathbf{x}.$

Simple lineære afbildninger og deres matrix repræsentationer

- Refleksion i planen (i en akse eller en vinkelhalverende; mere generelt i en linie gennem Origo)
- Refleksion i rummet (i en koordinatplan; mere generelt i en plan gennem Origo)
- Drejning om Origo i planen
- Drejning om en akse gennem Origo i rummet (senere)
- Kontraktion, dilation, herunder identitetsafbildning
- Vridning[1]
- (Dobbelt retvinklet) Projektion

[1] eng.: shear