# Lineære transformationer i A&D 12. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

21.10.2010

# Den inverse matrix
## Definition

En $(n \times n)$-matrix $A$ kaldes invertibel hvis og kun hvis der findes en $(n \times n)$-matrix $C$ således at

$$CA = AC = I \leftarrow \text{ enhedsmatrix.}$$

og ellers singulær.
I så fald er $C$ entydig bestemt; hvis $C$, $D$ er inverse til $A$, så:

$$C = CI = C(AD) = (CA)D = ID = D.$$

Man skriver $A^{-1}$ for den inverse matrix til $A$.

# Regler for inverse matricer

$A$, $B$ kvadratiske invertible matricer af samme størrelse.

1. $A^{-1}$ er invertibel og $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AB$ er invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $A^T$ er invertibel og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

# Den inverse matrix

## En formel for $(2 \times 2)$-matricer

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ er}$$

**invertibel** hvis $\det A = ad - bc \neq 0$ og

**singulær** hvis $\det A = 0$.

Hvis $\det A \neq 0$, så gælder:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

# Den inverse matrix
## Den tilsvarende lineære afbildning

Betragt den tilsvarende lineære (matrix-)afbildning
$T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
$T$ har en invers afbildning $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (den modsatte vej) med
$(ST)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ og $(TS)(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$
hvis og kun hvis $A$ er invertibel.
I så fald: $S(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.
Ensbetydende betingelser:

- $T$ er bijektiv, dvs. både injektiv og surjektiv.
- Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning $A^{-1}\mathbf{b}$ for alle $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$.
- Alle $A$s søjler (alle $A$s rækker) har Pivotposition.
- $A$ er rækkeækvivalent til enhedsmatricen $I$.

Der findes altså mange andre singulære matricer end 0-matricen! – alle dem der ikke har Pivotposition i hver søjle/række!

# Beregning af invers matrix

## En opskrift - for matricer af moderat størrelse

1. Givet en $n \times n$-matrix $A$. Opstil den udvidede $n \times 2n$-matrix

$$[A|I_n]$$

   med en enhedsmatrix $I_n$ på højresiden.
2. Rækkeoperationer: Overfør denne udvidede matrix til reduceret echelonform $[H|C]$.
3. Hvis $H = I_n$ – Pivoter i hver søjle – så er $A$ invertibel og $C = A^{-1}$.
4. Hvis $H \neq I_n$, så er $A$ ikke invertibel.