Lineære transformationer i A&D 19. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

25.11.2010

Ortogonale vektormængder og baser

Definition

En vektormængde $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbf{R}^n$ kaldes

ortogonal hvis vektorerne er parvis ortogonale: $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, $i \neq j$.

ortonormal hvis alle vektorer desuden er enhedsvektorer: $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$.

Theorem

En ortogonal vektormængde er lineært uafhængig, hvis den ikke indeholder 0-vektoren $\mathbf{0}$.

Definition

n ortogonale (ortonormale) vektorer i $\mathbf{R}^n$ udgør en ortogonal/ortonormalbasis: De udspænder hele $\mathbf{R}^n$.

Koordinater med hensyn til ortogonal/ortonormal-basis

Givet en ortogonalbasis $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ for $\mathbf{R}^n$. Så er koordinaterne for en vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ med hensyn til denne basis givet ved

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{\| \mathbf{v}_2 \|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_n}{\| \mathbf{v}_n \|^2}\mathbf{v}_n.$$

For en ortonormalbasis $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ simplificeres dette til

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n.$$

Koordinaterne fås ve at projicere vektoren $\mathbf{u}$ på linjerne gennem Origo med vektorerne $\mathbf{v}_i$ som retningsvektorer.

Givet en basis $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ for $\mathbf{R}^n$ bestående af n lineært uafhængige vektorer.
Så opnås en ortogonalbasis $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ med Span $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\} = \text{Span } \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ på følgende måde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|^2}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\| \mathbf{v}_2 \|^2}\mathbf{v}_2 \\
\cdots &= \cdots \\
\mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_n - \frac{\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}_1}{\| \mathbf{v}_1 \|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}_2}{\| \mathbf{v}_2 \|^2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}_{n-1}}{\| \mathbf{v}_{n-1} \|^2}\mathbf{v}_{n-1}
\end{aligned}$$

og en tilsvarende ortonormalbasis $\{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n\}$ ved

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\| \mathbf{v}_i \|}\mathbf{v}_i.$$

Definition

- En lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kaldes ortogonal hvis den bevarer længder: $\| T(\mathbf{v}) \| = \| \mathbf{v} \|$.
- En $n \times n$-matrix Q kaldes ortogonal hvis den bevarer længder: $\| Q\mathbf{v} \| = \| \mathbf{v} \|$.

Theorem

Følgende udsagn om en $n \times n$-matrix Q er ækvivalente:

1. *Q er ortogonal, dvs.. bevarer længder.*
2. *Q bevarer prikprodukt: $Q\mathbf{u} \cdot Q\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.*
3. $Q^T Q = I$
4. *Q er invertibel og $Q^{-1} = Q^T$.*

Givet to ortogonale $n \times n$-matricer P, Q. Så gælder:

- PQ er ortogonal.
- Q^{-1} er ortogonal.
- Q^T er ortogonal.

Tilsvarende for ortogonale lineære afbildninger.