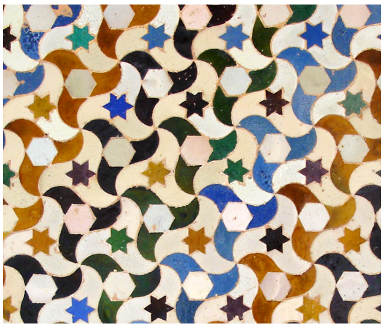
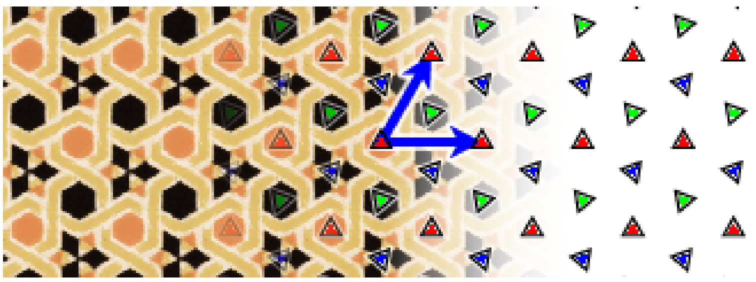
AALBORG UNIVERSITET
DET TEKNISK-NATUR-VIDENSKABELIGE FAKULTET
FØRSTE STUDIEÅR

ARKITEKTUR OG DESIGN
MATEMATIK OG FORM

MINIPROJEKT 4
27. MARTS 2013
MARTIN RAUSSEN

I dette miniprojekt undersøger vi matematikken bag regelmæssige 2D -mønstre som for eksempel





En regelmæssig sekskant i planen har hjørner i punkter svarende til
$\mathbf{t}_k = \begin{bmatrix} \cos(k \cdot 60^0) \\ \sin(k \cdot 60^0) \end{bmatrix}$, dvs. i
$\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{t}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix},$
$\mathbf{t}_3 = -\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_4 = -\mathbf{t}_1$ og $\mathbf{t}_5 = -\mathbf{t}_2$.
Et sekskantet gitter T består af alle vektorer på formen $k\mathbf{t}_0 + l\mathbf{t}_2, k, l \in \mathbf{Z}$ hele tal.

1. Check at $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_2$ og tegn de seks vektorer hvis spidser danner den regelmæssige sekskant.

2. Tegn et udsnit af gitteret T.

En drejning om Origo med vinklen θ er beskrevet på formen $D(\mathbf{x}) = A_\theta \mathbf{x}$ med
$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$

3. Gør rede for at en drejning med vinklen θ om et punkt P_0 med stedvektor $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{x}_0$ er på formen
$D_1(\mathbf{x}) = A_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0$ –
med udgangspunkt i en tegning.

Nu ser vi på en plan transformation på formen $D_2(\mathbf{x}) = A_\theta \mathbf{x} + \mathbf{t}$ – først en drejning med vinkel θ om Origo, så en parallelforskyding med vektoren $\mathbf{t}$.

4. Gør rede for at D_2 er en drejning med vinklen θ om punktet P_0 med stedvektoren $\mathbf{x}_0 = (I_2 - A_\theta)^{-1}(\mathbf{t})$.[1]

5. Beregn $(I_2 - A_\theta)^{-1}$ for $\theta = 120^0$ og $\theta = 240^0$.[2] Gør rede for at
$(I_2 - A_{120^0})^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3} A_{30^0}$ og at
$(I_2 - A_{240^0})^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3} A_{-30^0}$.[3]

Symmetrigruppen for et (tapet)mønster af typen p_3 (som i illustrationen ovenfor) består af alle parallelforskydninger på formen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t}$ med $\mathbf{t} \in T$ en gittervektor, og af alle drejninger(!) på formen $D(\mathbf{x}) = A_\theta \mathbf{x} + \mathbf{t}$, $\theta = 120^0$ eller $\theta = 240^0$ og $\mathbf{t} \in T$.

6. Find stedvektorene til omdrejningspunktene $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ for $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ og $\mathbf{t} = 2\mathbf{t}_0$ (med $\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$) og $\theta = 120^0$.
Gør rede for at disse omdrejningspunkter deler diagonalerne i gitterparallelogrammet med hjørner i $\mathbf{0}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_1$ i tre lige store dele.

[1] vink: Sammenlign med D_1!
[2] I_2 står for en 2D-identitetsmatrix.
[3] Vink: $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^0 = \frac{1}{2}$.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
-
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN

Heraf kan man udlede at man kan udfylde en firkant med hjørner i punkterne med stedvektorer $\mathbf{t}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1, \mathbf{x}_2$ som man vil – resten af mønstret fyldes op ved hjælp af alle parallelforskydninger og drejninger beskrevet ovenfor.

7. Tegn og forklar! Denne webside kan sikkert hjælpe med ideer.[4].

8. Grasshopper og Rhino: Se denne vejledning.

Litteratur

Wikipedia Wallpaper group

[4]Click p3 og tegn noget småt med musen