Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 7.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 7.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 7.

Næste gang:

Mandag, 11. februar i Auditorium 7.
Gauss-algoritme til løsning af lineære ligningssystemer. Parameterfremstilling af løsningsmængden.

Mål og indhold:

Repetition:

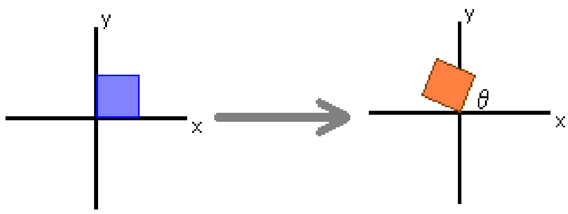
Vektorer. Prikprodukt, krydsprodukt og geometriske anvendelser. Matricer.

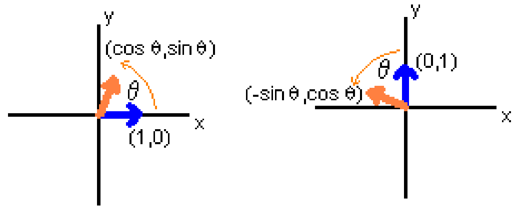
Nyt stof:

Linearkombinationer:
Hvordan kan man kombinere sig frem fra få vektorer til mange andre? Linearkombinationer af vektorer kan udspænde en hel plan, hele rummet eller faktisk endnu "større" lineære verdener. Når man beskriver en vektor ved hjælp af koordinater, så skriver man den faktisk som linearkombination af standard enhedsvektorerne. Vi skal bruge linearkombinationer fortrinsvis i beskrivelsen af planer i rummet.
Produkt mellem matrix og vektor:
En linearkombination kan "kodes" som produkt af en matrix (hvis søjler indeholder de udspændende vektorer) og en vektor med "vægtene": Produktet $A\mathbf{v}$ af en $m \times n$-matrix A og en $n \times 1$-rækkevektor $\mathbf{v}$ er en $m \times 1$-vektor som beregnes som linearkombination af As søjlevektorer givet ved $\mathbf{v}$s koefficienter. Se definitionen på p. 19.

Vi undersøger produktet med specielle matricer:

- Enhedsmatricen[1] I_n er en $n \times n$- diagonalmatrix med 1-taller på diagonalen. Der gælder $I\mathbf{v} = \mathbf{v}$ for alle $n \times 1$-vektorer.





- Multiplikation med en (2×2)-rotationsmatrix A_θ: For en (2×1)-søjlevektor beskriver $A_\theta\mathbf{v}$ den vektor man får ved at dreje $\mathbf{v}$ vinklen θ[2] mod uret.

Vi begynder nu med at se på den vigtigste anvendelse af matricer og vektorer:
Lineære ligningssystemer:
Mange spørgsmål i ingeniørvidenskaberne, naturvidenskaberne, økonomi mv. fører i sidste ende til lineære ligningssystemer, et antal lineære ligninger i et antal variable. I kender

[1] også kaldet identitetsmatrix; eng.: identity matrix
[2] græsk, det udtales "teta"

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN

til metoder til at løse to lineære ligninger i to variable fra gymnasiet.

Vi beskæftiger os med metoder til at løse systemer af m lineære ligninger i n variable – hvor m, n er vilkårlige positive heltal. Som det første spørger man om et sådant ligningssystem i det hele taget har en løsning (om det er konsistent); og hvis ja, om det har én eller flere løsninger – og hvordan man kan beskrive løsningerne på en simpel form.

Et lineært ligningssystem er fuldstændigt beskrevet ved dets koefficientmatricen[3] og højresiden i systemets totalmatrix[4]. Målet er at bestemme løsningsmængden til ligningssystemet.

Rækkeoperationer: For at løse et lineært ligningssystem gennemfører man et antal rækkeoperationer på den tilsvarende totalmatrix. Den oprindelige matrix og den man får efter at have gennemført en eller flere rækkeoperationer kaldes rækkeækvivalente. Det er væsentligt at indse, at rækkeoperationerne bevarer løsningsmængden, dvs. at ligningssystemer svarende til rækkeækvivalente matricer har den samme løsningsmængde.

Nu gælder det om at overføre en matrix til en anden simplere matrix på "trappeform"[5] ved hjælp af rækkeoperationer. Ligningssystemet svarende til en totalmatrix på trappeform kan nemt løses, én ligning og én variabel ad gangen, ved baglæns substitution[6].

Selve udregning overlades som regel i praksis til lommeregner eller computerprogram. Men det er vigtigt at forstå fremgangsmåden og beskrivelsen af løsningsmængden!

Litteratur:

MF Ch. 1.2 – 1.3, pp. 13 – 33.

Komp 4, 6 – 8, 10.

Wikipedia Systems of linear equations

Webdemos:

Denne webside demonstrerer udregning af produktet mellem en matrix og en vektor. Eller denne her – uden mange ord.

På denne webside kan man øve sig i at gennemføre rækkereduktioner på systematisk vis; man skal selv angive hvilke rækkeoperationer der skal udføres; udregningen klares automatisk!

Opgaver:

MF, Ch. 1.2, pp. 25 – 26 1, 3, 5, 7, 9, 11, 17, 19.

MF, Ch. 1.1, pp. 11 – 13 69, 71, 75, 79, 81[7]

Facit til disse opgaver findes i bogen på pp. 239 ff.

[3] eng.: coefficient matrix
[4] eng.: augmented matrix
[5] eng.: echelon form
[6] eng.: back susbstitution
[7] Vink:

69 $i \neq j \Rightarrow b_{ij} = 0$

75 Indgang (koefficient) c_{ij} for matricen $C = B + B^T$: $c_{ij} = b_{ij} + b_{ji}$

81 $2A = (A + A^T) + (A - A^T)$