Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 7.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 7.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 7.

Næste gang:

i Auditorium 7.
"Hvor meget" udspænder et antal vektorer?

Mål og indhold:

Repetition:

Linearkombinationer. Produkt matrix - vektor. Lineære ligningssystemer.

Nyt stof:

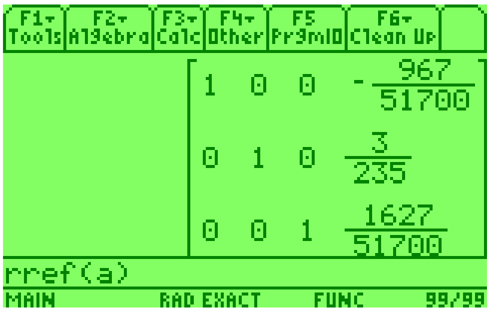
Et lineært ligningssystem (m ligninger i n ubekendte) med koefficientmatrix A og højresiden $\mathbf{b}$ svarer til matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og vi vil gerne finde alle løsningsvektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Til dette formål sætter vi løsning af lineære ligningssystemer vha. rækkeoperationer helt i system.
Rækkereduktion til række-echelonform: (et fint fransk ord for trappeform). Givet en (total)matrix A. Hvordan kan man overføre den i en rækkeækvivalent simpel matrix således at det tilsvarende ligningssystem er nem at løse? Og hvordan kan man karakterisere "simpel"?
Gauss-algoritme:
Det gøres ved den såkaldte rækkereduktionsalgoritme (eller Gauss-algoritme). Ved at arbejde sig systematisk gennem søjlerne fra venstre til højre opnår man

- ved rækkeombytninger: at ledende koefficienter optræder længst muligt til venstre;
- og ved rækkeadditioner("erstatninger"): at der kun står 0-taller under en ledende koefficient i hver Pivotsøjle.

Efter et antal operationer ender man med en (rækkeækvivalent) matrix på echelonform. Søjler med Pivotpositioner (skal indeholde en ledende koefficient) kaldes Pivotsøjler; de tilsvarende variable er bundne[1]; evt. resterende variable er frie[2] variable.

Det kan som regel betale sig at fortsætte med flere rækkeoperationer for at nå frem til en matrix på reduceret echelonform (som iøvrigt er entydigt bestemt ud fra den oprindelige matrix). Det opnås med den såkaldte Gauss-Jordan algoritme. Her sørger man – ved rækkemultiplikationer – for at alle Pivotelementer normeres til 1-taller og – ved rækkeadditioner – at der kun står 0-taller også over disse Pivotpositioner.

[1] på engelsk: basic
[2] eng.: free



Antallet af Pivotsøjler i echelonmatricen kaldes rangen[3] – af både echelonmatricen og af den oprindelige $m \times n$-matrix. Desuden tales om matricens nullitet[4]:

$$rank(A) + nullity(A) = n =$$

antal søjler i A. Rangen svarer til antallet af bundne variable, nulliteten til antallet af frie variable.

Om løsningsmængden af systemet givet ved $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved man nu:

1. Systemet har en løsning (er konsistent) hvis koefficientmatricen A og totalmatricen $[A|\ \mathbf{b}]$ har den samme rang. Det betyder nemlig, at man ved rækkereduktion aldrig kommer frem til en ledende koefficient i højresiden.
2. Hvis systemet er konsistent og hvis koefficientmatricens rang er n (maximal) og dermed defekten 0 (minimal), så har systemet netop én løsning.
3. Hvis systemet er konsistent og hvis koefficientmatricens rang er mindre end n og dermed defekten større end 0, så har systemet uendelig mange løsninger.

Litteratur:

MF Ch. 1.3 – 1.4, pp. 33 – 50.

Komp pp. 10 – 14.

Wikipedia Gaussian elimination

Wikipedia Gauss-Jordan elimination

Mathworld Gaussian elimination

Webdemo:

På denne webside kan man øve sig i at gennemføre rækkereduktioner på systematisk vis; man skal selv angive hvilke rækkeoperationer der skal udføres; udregningen klares automatisk!

Opgaver:

MF, Ch. 1.2 29, 31, 33, 45 – 64.

MF, Ch. 1.3 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 23, 25, 33, 37.

[3] eng.: rank
[4] eng.: nullity

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN