Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 7.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 7.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 7.

Næste gang:

i Auditorium 7, i delgrupper.
Introduction to vector operations in Grasshopper (Dario Parigi).
PC skal medbringes; Grasshopper skal være downloaded.

Mål og indhold:

Repetition:

Løsning af lineære lignigssystemer. Beskrivelse af løsningsmængden på parameterform.

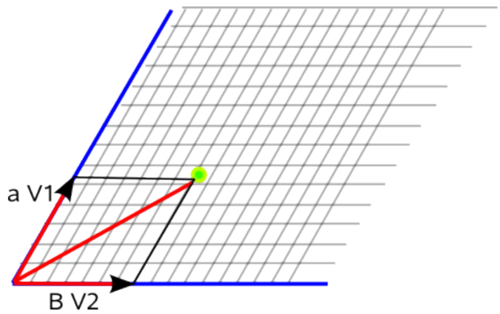
Nyt stof:

Nu skal vi til at knytte en række begreber fra den geometriske og den algebraiske verden sammen:

1. linearkombinationer og spænd (geometri)
2. vektorligninger (algebra)
3. matrixligninger og (algebra)
4. (de kendte) lineære ligningssystemer (regnemetode).

Spænd: Mængden af alle linearkombinationer $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$ med reelle koefficienter (eller vægte) af et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ i $\mathbf{R}^n$ kaldes vektorernes spænd[1] $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} \subset \mathbf{R}^n$ – og vektorerne $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ frembringer[2] dette spænd.

[1] eng.: span
[2] eng.:generate



Spændet har geometriske interpretation: Spændet af én vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ svarer til vektorerne på en ret linie med retningsvektor $\mathbf{v}$ gennem Origo. Spændet af to vektorer svarer typisk, men ikke altid, til en plan gennem Origo (og ikke, hvad mange fejlagtigt tror, til det område "mellem" de to vektorer; det drejer sig om en hel plan!)

Vektorligninger: Er en given vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ indeholdt i spændet $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_p\}$? Svaret findes ved at løse en vektorligning $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$, eller et ækvivalent lineært ligningssystem hvis totalmatrix har søjler $[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p \mid \mathbf{b}]$. Vektoren er indeholdt i spændet hvis og kun hvis dette ligningssystem er konsistent.

Hvornår er spændet af p vektorer i $\mathbf{R}^m$ lig med hele rummet $\mathbf{R}^m$? For at teste dette, indsætter man vektorerne som søjlevektorer i matricen $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p]$. Hvis rangen for denne matrix opfylder $rank(A) = m$ – en Pivotposition i hver række – så kan man løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for enhver højreside $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$; og ellers ikke!

Vi skal til at undersøge hvor mange vektorer man skal bruge for at udspænde en plan, rummet eller evt. større "hyperrum".

1. Hvornår udspænder et antal vektorer hele $\mathbf{R}^n$ – dvs. alle vektorer med n koefficienter? Sæt vektorerne i en matrix. Denne matrix skal have rang n – Pivoter i hver række (Theorem 1.6)

2. Hvornår kan man udelade den sidste vektor i en liste uden at spændet bliver mindre? Det kan man når den sidste vektor er indeholdt i spændet af de forudgående (Theorem 1.7)

3. En vektor i spændet er en linearkombination $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$. Er koefficienterne $c_1, \cdots, c_k$ entydigt bestemt – har $\mathbf{v}$ en entydig "adresse"?

Det sidste spørgsmål fører til definition for lineær uafhængighed og afhængighed – hvor man undersøger spørgsmål (3) for $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

En mængde vektorer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ kaldes lineært afhængig[3], hvis vektorligningen (afhængighedsrelationen)

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

har andre løsninger end den *trivielle* løsning $c_1 = \cdots = c_k = 0$ – og lineært uafhængig ellers.

En lineært afhængig mængde af vektorer har den egenskab at (mindst) en af vektorerne kan udtrykkes som linearkombination af de andre. Denne vektor kan derfor udelades, hvis man vil udtrykke spændet af vektorerne $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ så økonomisk som muligt.

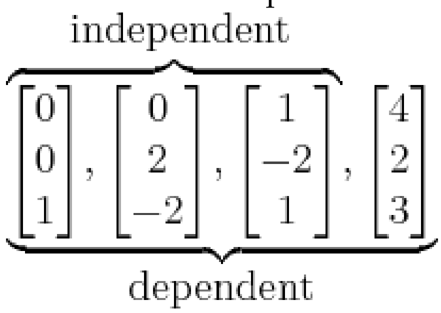
Hvornår er op til tre vektorer lineært uafhængige?

Én vektor $\mathbf{v}$ er lineært afhængig, hvis den er lig med $\mathbf{0}$-vektoren - ellers er den lineær uafhængig og udspænder en linje.

To vektorer er lineært afhængige hvis de er parallele. I så fald udspænder de kun en linje – eller nulrummet; hvis de er lineært uafhængige, så udspænder de en plan.

Tre vektorer i rummet udspænder hele rummet hvis og kun hvis de er lineært uafhængige; er de lineært afhængige, udspænder de noget mindre: en plan, en linje eller bare nulrummet.

Generelt er et antal vektorer lineært uafhænginge, hvis enhver vektorer i deres spænd er en entydig linearkombination af disse vektorer; hver vektor har kun en adresse i det "lineære postvæsen"!



Metode: Hvordan finder man ud af om en mængde vektorer er lineært uafhængig? Man indsætter vektorerne som søjler i en matrix A. Vektorerne er lineært uafhængige hvis hver søjle i denne matrix A er en Pivotsøjle – for så har matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En god sammenfatning om information som ligger i rangen af matricen A findes i lærebogen på side 83.

[3] eng.: linearly dependent/independent

Litteratur:

MF Ch. 1.6 – 1.7, pp. 66 – 83.

Komp p. 4.

Wikipedia Linear span

Wikipedia Linear independence

Opgaver:

MF, Ch. 1.4, pp. 52 – 54 5, 9, 15, 31, 35, 47[4], 75, 77, 93.[5]

MF, Ch. 1.6, pp. 72 – 74 7, 13, 27, 43.

[4]Tre ligninger i de ubekendte a, b, c
[5]Beregn $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
-
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN