Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 7.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 7.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 7.

Næste gang:

Tirsdag, 26. februar, kl. 12:30 – 16:15. Matrixmultiplikation. Sammensætning af lineære afbildninger.

Mål og indhold:

Repetition:

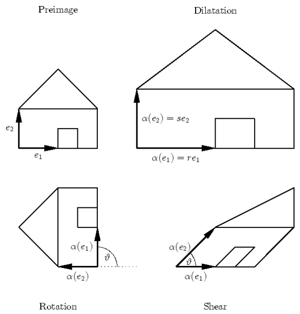
Span af et antal vektorer. Lineær (u-)afhængighed: Definitioner og afgørelsesmetoder.

Nyt stof:

Vi kommer til en ny anvendelse for matricer: som beskrivelse for lineære afbildninger.

En afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (f.eks. en projektion fra rummet ind i planen, f.eks. en opstalt) lader til enhver vektor $\mathbf{x}$ i definitionsmængden[1] $\mathbf{R}^n$ svare en vektor $T(\mathbf{x})$ i dispositionmsængden[2] $\mathbf{R}^m$ – den "spiser" n-vektorer og "afleverer" m-vektorer. Sådan en afbildning[3] kaldes lineær, hvis den respekterer linearkombinationer, se definitionen og egenskaber på lærebogens s. 171. Nogle vigtige egenskaber: En lineær afbildning

- overfører rette linier i rette linier
- bevarer proportioner langs med en ret linie



Vi verificerer at afbildningen $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, som er givet ved multiplikation med en $m \times n$-matrix A, altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, er lineær.

Standardmatricen for en lineær afbildning: Faktisk kan man beskrive enhver lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ som en matrixafbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, hvor A er en $(m \times n)$-matrix, som kaldes standardmatricen (eller matrix præsentationen) for den lineære afbildning T.

Her er opskriften til hvordan man finder A: Man tager standard enhedsvektorene $\mathbf{e}_i$: et 1-tal i position i, 0-taller på alle andre positioner. Så bestemmer man deres billeder $T(\mathbf{e}_i)$ under den lineære afbild-

[1] eng.: domain
[2] eng.: codomain
[3] eng.: transformation, map

Fredrik Bajersvej 7G
9220 Aalborg Øst
9940 8855
-
raussen@math.aau.dk
people.aau.dk/~raussen

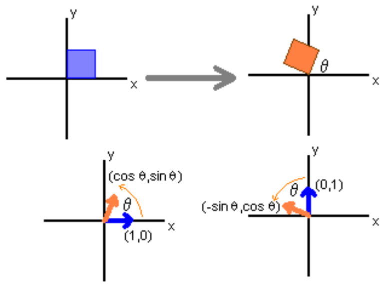
ning T. Disse vektorer $T(\mathbf{e}_i)$ indsættes nu efter tur som søjler i standardmatricen A. På formelsprog:

$$A = [T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)].$$

Konsekvens: En lineær afbildning kan beskrives ekstremt økonomisk: Man behøver kun at kende de nm talkoefficienter i afbildningens standarmatrix!

Geometriske eksempler for lineære afbildninger:
Mange geometrisk væsentlige afbildninger er lineære, og vi bestemmer deres standardmatricer:

- drejninger om Origo i plan og rum,
- spejlinger i en linie gennem Origo i planen, hhv. i en plan gennem Origo i rummet,
- skaleringer,
- strækninger og skrumpninger i aksernes retninger,
- shears = "vridninger",
- projektioner (vigtig i forbindelse med teknisk tegning)
- ...



Litteratur:

MF ch. 2.7, pp. 167 – 175.

Wikipedia Linear map

Software:

Med den følgende applet fra nettet kan man illustrere effekten af en lineær afbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ fra planen ind i planen:

- Linear Transformations

Opgaver:

MF, 1.7, pp. 84 – 86 5, 11, 17, 23, 41, 63 – 84.
I de første tre opgaver behøver man ikke sætte hele matrix-apparatet i gang; man kan se resultatet "by inspection". I opgave 41 gennemføres rækkeoperation til echelonmatrix inden man konkluderer.

MF, 2.7, pp. 175 – 179 1, 3, 7, 9, 21.
Opgave 1 og 3: Hvilke type vektorer (hvor mange koordinater) kan man gange med A, hvilke typer vektorer er resultatet. Se p. 166.
På lignende måde: opg. 21.