DET TEKNISK-NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET
FØRSTE STUDIEÅR

AALBORG UNIVERSITET
ARKITEKTUR OG DESIGN
MATEMATIK OG FORM

15. LEKTION
22. MARTS 2013
HORIA CORNEAN

Køreplan:

Repetition:

bortfalder denne gang. Vi begynder på en frisk med et nyt emne.

Forelæsningens 1. del:

kl. 8:15 – 8:50 i auditorium 7.

Forelæsningens 2. del:

kl. 8:55 – 9:25 i auditorium 7.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Forelæsningens 3. del:

kl. 11:25 – 12:00 i auditorium 7.

Næste gang:

Mandag, 25.3., kl. 8:15 – 12:00.
Kurvers længde og krumning.

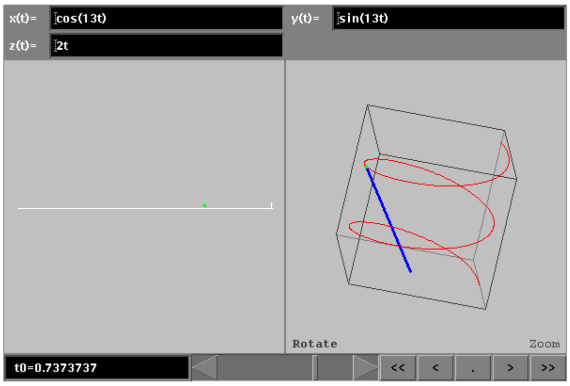
Mål og indhold:

Emneskift: De resterende kursusgange beskæftiger vi os med beskrivelse og analyse af krumme kurver i plan og rum. Redskabet hertil er vektorfunktioner af én variabel. Ideen er, at man til hver tidspunkt t i definitionsintervallet knytter en foranderlig vektor $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k} =< x(t), y(t), z(t) >$[1], som peger på punktet P_t med $\mathbf{r}(t)$ som stedvektor: $\overrightarrow{OP_t} = \mathbf{r}(t)$.[2]

Vektorene $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$[3] står for de tre standardenhedsvektorer i rummet; $x(t), y(t), z(t)$ kaldes for vektorfunktionens koordinatfunktioner. Man siger at $\mathbf{r}(t)$ er en parameterfremstilling for kurven bestående af alle punkter P_t.

Parametrization of a 3D Curve

This demo illustrates the connection between a parameter t (scrollable) and the curve it parametrizes:



Det er nemt at forholde sig til differentiation af vektorfunktioner: Man differentierer bare hver koordinatfunktion for sig – hvis altså koordinatfunktionerne er differentiable. Derfor er det heller ikke ret forbavsende, at de sædvanlige regler for differentiation af summer og produkter af funktioner kan overføres til vektorfunktioner; se Theorem 2 på s. 272. Bemærk at produktreglen også gælder for prikprodukter

[1] Lærebogen bruger parenteser <> i notationen for vektorer; vi vil som oftest bare bruge notationen med runde parenteser () eller kantede parenteser [] som I kender til

[2] Ved bevægelser i planen bruger man kun to koordinatfunktioner $x(t), y(t)$ og standardenhedsvektorene $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

[3] i stedet for $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

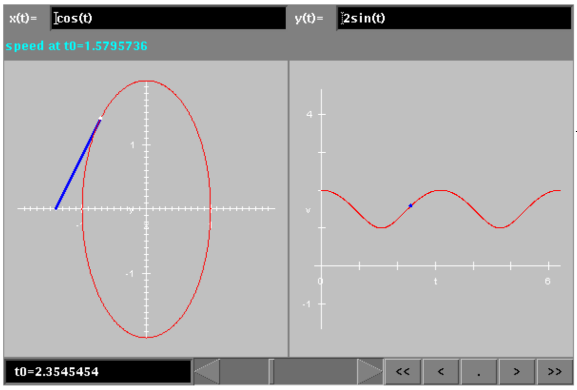
9940 8879
-

CORNEAN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~CORNEAN

og krydsprodukter!

Moving velocity vector and speed

This applet illustrates the (blue) *velocity vector* vector along a curve. Its length is the *speed v* of the parametrization, shown in the right–hand illustration..



Hvilken geometrisk/mekanisk betydning har de afledede vektorfunktion så? Den afledede $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ af vektorfunktionen $\mathbf{r}(t)$ står for hastighedsvektoren i punktet P_t. Dens længde $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ er den momentane fart; dens retning er tangent til kurven givet ved $\mathbf{r}(t)$ i punktet P_t – med mindre $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$. Den dobbelte afledede $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ står for accelerationsvektoren, hvis længde $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$ er den momentane acceleration. Den er som regel ikke lig med den afledede af farten $v(t)$ – tænk blot på bevægelsen af en satellit rundt om jorden. Mere om dette næste gang!

Også integration af vektorfunktioner foregår koordinatvis. Det tillader at bestemme vektorfunktionen $\mathbf{r}(t)$ for en bevægelse hvis bare man kender til parameterfremstillingens accelerationsfunktion $\mathbf{a}(t)$ samt til begyndelsesvektor $\mathbf{r}(t_0)$ og begyndelseshastighed $\mathbf{v}(t_0)$.

Litteratur:

MF Ch. 11.5, pp. 269 – 279.

Komp Kompendium i Calculus.
Kan erhverves i boghandelen.

Wikipedia Vector-valued function

Software:

- A Geometric Laboratory
- Investigate Parametric Curves

Opgaver:

Grundrelation Forklar, at $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ for enhver vinkel θ.[4]

Differentiationsgymnastik Differentier hver af de sædvanlige funktioner $y = x^3, \sin x, \cos x, x\sin x, x^2\cos x, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \sin 2x, \cos(x^2), e^x, e^{2x}, e^{x^2}$.

Integrationsgymnastik Integrer hver af de sædvanlige funktioner $y = x^3, \sin x, \cos x, \sin 2x, e^x$ – find først stamfunktioner og herefter integralet fra $x = 0$ til $x = 2$.

MF, Ch. 11.5, pp. 280 – 282 1, 3[5], 7[6], 9[7], 15[8], 19[9], 29[10].

[4] Hvor lang er vektoren $[\cos\theta, \sin\theta]$? Se evt. p. 374.

[5] Match parameterfremstillingerne med figurene øverst på siden. Om nødvendigt kan det geometriske laboratorium hjælpe.

[6] Facit: $\mathbf{r}'(0) = [2, -1]$

[7] Facit: $\mathbf{r}'(\frac{3}{4}) = [6\pi, 0]$

[8] Facit: $\mathbf{v}(t) = [-3\sin t, 3\cos t, -4], v(t) = 5, \mathbf{a}(t) = [-3\cos t, -3\sin t, 0]$

[9] Facit: $[\frac{484}{15}, 0]$

[10] Facit: $\mathbf{r}(t) = [2, t^2, 5t - t^3]$