Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i auditorium 7.

Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i auditorium 7.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene

Forelæsningens 2. del:

kl. 11:25 i auditorium 7.

Næste gang:

Onsdag, 27.3., kl. 8:15 – 12:00.
Miniprojekt 4.

Mål og indhold:

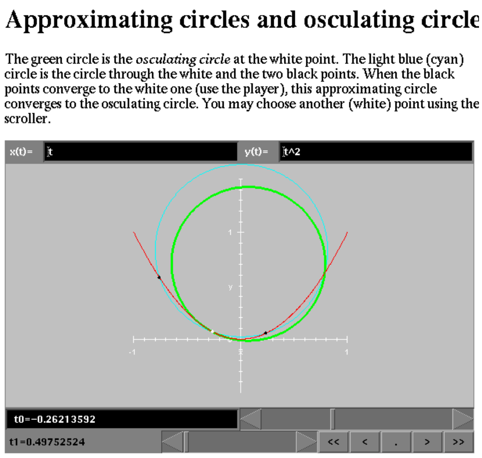
Repetition:

Vektorfunktioner som parameterfremstillinger for kurver i plan og rum.
Differentiation og integration af vektorfunktioner.

Nyt stof:

Ved differentiation af en parameterfremstilling finder man den (variable) hastighedsvektor, og som dens længde, farten som funktion af tiden. Ved at integrere farten fra start til slut, finder man den tilbagelagte strækning; desværre er formlerne dog ofte så komplicerede, at man ikke kan integrere eksplicit.

Hvordan kan man måle/beregne, hvor krum en kurve er i et givet punkt? Det er rimeligt at sætte krumningen[1] af en cirkel med radius R til $\frac{1}{R}$. For en generel kurve sætter man den til krumningen af den bedst approksimerende cirkel i et givet punkt, den såkaldte krumningscirkel[2].



Det samme mål fås hvis man differentierer den vandrende enhedstangentvektor $\mathbf{T}(s)$ langs med kurven med hensyn til kurvelængden s. Når man sætter $\mathbf{T}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$; så måler $\varphi(s)$ vinklen mellem X-aksen og $\mathbf{T}(s)$ og krumningen kan tydes som vinkelhastighed $\varphi'(s)$. Krumningen for en plan kurve beregnes ved hjælp af formel (12) på s. 285. Det er dog smartere hvis man lader være med at tage den numeriske værdi i tælleren: Så finder man tillige ud af om kurven krummer med eller mod uret.

Ved hjælp af krumningen kan man give en bedre beskrivelse for den vandrende

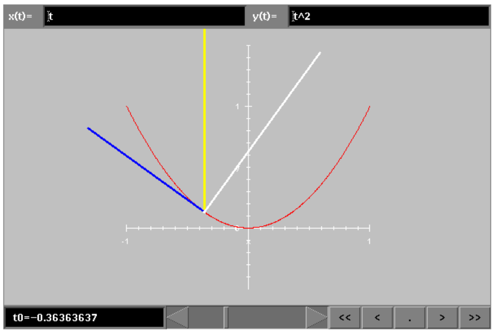
[1] eng.: curvature
[2] eller oskulationscirkel; eng.: osculating circle

accelerationsvektor $\mathbf{a}(t)$. Hvis man – for en plan kurve – definerer $\mathbf{N}(t) = \hat{\mathbf{T}}(t)$ som vandrende normalvektor, så har accelerationen en tangential og en normal komponent:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v^2(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t); \qquad (1)$$

Tangential and normal components of the acceleration

The moving acceleration vector **a** in yellow, its tangential component in blue, its normal component in white.



Formlen (1) stemmer også for en rumkurve, blot skal $\mathbf{N}$ så findes som en enhedsvektor i retning af $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$. Specielt kan man se, at

- høj fart kombineret med stor krumning udløser problematisk store normalkræfter – derfor bremser man ned i hårnålesving!
- Et pludseligt skifte i krumningen medfører et pludseligt problematisk skifte i normalkræfterne og skal derfor undgås i bevægelige systemer.

Endelig kan formel (1) også bruges til at bestemme krumningen for en rumkurve, se formel (27) på s. 290.

Litteratur:

MF Sect. 11.6, pp. 283 – 291.

Wikipedia Curvature

Software:

- A Geometric Laboratory
- The Length of a Parametric Curve
- Tangent Circles and the Curvature of a Function

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

Integration MF, 11.5, pp. 280 – 283: 19, 27, 33[3].

Anvendelser MF, 11.5: 61, 41[4], 49[5].

Kurvelængde MF, 11.6, pp. 295 – 297: 1[6], 3[7], 5[8].

Krumning MF, 11.6: 9[9], 11[10].

[3] Facit: Se lektionsplan 15
[4] Facit: højde: 100 ft, fart: $\sqrt{6425} \sim 80.16$ ft/s
[5] Facit: $70\sqrt{10} \sim 221.36 m/s$
[6] Facit: 10π
[7] Facit: $19(e-1) \sim 32.65$
[8] Facit: $\frac{20+9\ln 3}{10} \sim 2.99$
[9] Find først en parameterfremstilling for kurven; Facit: $\kappa(0) = 1$
[10] Facit: $\kappa(\frac{\pi}{4}) = \frac{40\sqrt{82}}{1681} \sim 0.22$

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8879
-
CORNEAN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~CORNEAN