

Matematik og Form

Intro til vektorer og matricer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2012

Operationer med vektorer

Definition

Givet vektorer $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$.

Addition: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n]$.

Multiplikation med tal c : $c\mathbf{u} = [cu_1, \dots, cu_n]$.

Prikprodukt: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

Norm/længde: $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$.

Afstand: mellem \mathbf{u} og \mathbf{v} : $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Krydsprodukt ($n = 3$):

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1].$$

Ortogonale vektorer

- Vektorerne \mathbf{u} og \mathbf{v} er **ortogonale** hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
- ($n = 2$:) Vektoren $\hat{\mathbf{u}} = [-u_2, u_1]^T$ er ortogonal på $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$.
- ($n = 3$:) Vektoren $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ er ortogonal på både \mathbf{u} og \mathbf{v} .

Regneregler

- 1 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$
- 2 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- 3 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- 4 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- 5 $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
- 6 $\|c\mathbf{u}\| = |c| \|\mathbf{u}\|$
- 7 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$

Uligheder

Cauchy-Schwarz: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$

Vinkel α mellem \mathbf{u} og \mathbf{v} : $\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$

Trekant: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Givet en linje l ved retningsvektor \mathbf{v} og en vektor \mathbf{u} .

Ønskes: $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$, $\mathbf{w} \parallel \mathbf{v}$, $\mathbf{z} \perp \mathbf{v}$.

Løsning: $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$; $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$.

Afstand fra P i spidsen af \mathbf{u} til l : $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$.

Søjle- og rækkevektorer

$$\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n] \in \mathbf{R}^n; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^m.$$

$m \times n$ -matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

$a_{ij} \in \mathbf{R}$ **indgang** (eller koefficient) i i -te række og j -te søjle.

Regler for addition og multiplikation med skalar

- 1 $A + B = B + A$
- 2 $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 3 $A + O = A$
- 4 $A + (-A) = O$
- 5 $(st)A = s(tA)$
- 6 $s(A + B) = sA + sB$
- 7 $(s + t)A = sA + tA$

Definition

Givet en $m \times n$ -matrix $A = [a_{ij}]$.

Den **transponerede** matrix A^T er $n \times m$ -matricen $A^T = [a_{ji}]$.

Rækkerne i A^T er lig med A s søjler. Søjlerne i A^T er lig med A s rækker.

Regler for transposition

- 1 $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 2 $(sA)^T = sA^T$
- 3 $(A^T)^T = A$

Linearkombinationer. Spænd

Givet et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.

En vektor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$, $c_i \in \mathbf{R}$, kaldes en **linearkombination** af vektorerne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.

Vektorernes **spænd** er mængden af alle deres linearkombinationer:

$$\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} := \{c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_p\mathbf{a}_p \mid c_i \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n.$$

1D – 2D

- 1 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \text{Span}\{\mathbf{a}\} = \{c\mathbf{a} \mid c \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$
vektorer på en **linje** gennem Origo med retning \mathbf{a} .
- 2 $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$
vektorer i en **plan** med retningsvektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$
– med mindre \mathbf{a}_1 og \mathbf{a}_2 ligger på én linie.

Bemærk: en hel plan, ikke bare en kvadrant!

Matrix gange vektor

Definition

Definition

A en $m \times n$ -matrix, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \rightsquigarrow \mathbf{Ax} \in \mathbf{R}^m$.

$$A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Ax} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n$$

er linearkombinationen af A s søjlevektorer \mathbf{a}_i med vægte x_i .

Den i -te indgang (koefficient) i vektoren \mathbf{Ax} :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n =$$

prikprodukt $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ \dots \\ a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ mellem A s i -te rækkevektor og \mathbf{x} .

Specielle vektorer og matricer

Nulmatricen

$m \times n$ matricen O : alle koefficienter $o_{ij} = 0$.

Identitetsmatricen

$n \times n$ -matricen I_n har 1-taller på diagonalen og 0-taller udenfor. Dens søjlevektorer er standard enhedsvektorerne

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbf{R}^n.$$

$$I_n \mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ for alle } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

2D rotationsmatricer

For en vinkel θ (teta) sættes $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

For en vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ gælder:

$A_\theta \mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ er den vektor der fås ved at dreje vektoren \mathbf{v} om Origo (mod uret!)

Egenskaber

- 1 $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
- 2 $A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$
- 3 $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- 4 $(A + B)\mathbf{u} = A\mathbf{u} + B\mathbf{u}$
- 5 $O\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$
- 6 $I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$
- 7 $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$ – den j -te søjlevektor
- 8 $B\mathbf{w} = A\mathbf{w}$ for alle vektorer $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n \Rightarrow B = A$