# Matematik og Form: Matrixmultiplikation. Regulære og singulære matricer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2012

## Definition

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$: $AB = C = [c_{ij}]$ med

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} :$$

prikprodukt af $A$s $i$-te række med $B$s $j$-te søjle.
$\mathbf{c}_j = A\mathbf{b}_j$: $j$-te søjle i $C = A *$ $j$-te søjle i $B$!
Forudsætning: $n$= antal af $A$s søjler = antal af $B$s rækker.

$A$, $B$, $C$ matricer, således at produkterne er definerede; $r \in \mathbf{R}$.

## Regler

1. (associativ) $A(BC) = (AB)C$
2. (venstre distributiv) $A(B + C) = AB + AC$
3. (højre distributiv) $(B + C)A = BA + CA$
4. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$.
5. (neutralt element) $IA = AI = A$.
   $I$ er enhedsmatricen med 1-taller på og 0-taller udenfor diagonalen.
6. (ikke kommutativ) $AB \neq BA$ (som regel)
7. $(AB)^T = B^T A^T$ ($^T$: transposition)

## Definition

En $(n \times n)$-matrix $A$ kaldes regulær – eller invertibel – hvis og kun hvis der findes en $(n \times n)$-matrix $C$ således at

$$CA = AC = I \leftarrow \text{ enhedsmatrix.}$$

og ellers singulær.

## Entydighed

I så fald er $C$ entydig bestemt; hvis $C, D$ er inverse til $A$, så gælder:

$$C = CI = C(AD) = (CA)D = ID = D.$$

Man skriver $A^{-1}$ for den inverse matrix til $A$.

# Regler for inverse matricer

$A$, $B$ kvadratiske invertible matricer af samme størrelse.

## Regler

1. $A^{-1}$ er regulær og $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $AB$ er regulær og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $A^T$ er regulær og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

## Determinantkriterium

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ er}$$

regulær hvis determinanten $\det A = ad - bc \neq 0$ og

singulær hvis $\det A = 0$.

## Formel for invers matrix

Hvis $\det A \neq 0$, så gælder:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

## Rækkereduktion på udvidet matrix

1. Givet en $n \times n$-matrix $A$. Opstil den udvidede $n \times 2n$-matrix
$$[A|I_n]$$
med en identitetsmatrix $I_n$ på højresiden.
2. Rækkeoperationer: Overfør denne udvidede matrix til reduceret echelonform $[H|C]$.
3. Hvis $H = I_n$ – Pivoter i hver søjle – så er $A$ regulær og $C = A^{-1}$.
4. Hvis $H \neq I_n$, så er $A$ singulær.

## Definition

En elementær matrix er "næsten" en identitetsmatrix bortset fra

- Rækkeombytning ($i$-te og $j$-te række): 0 på diagonalen ved $_{ii}$ og $_{jj}$, 1 ved $_{ij}$ og $_{ji}$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Rækkemultiplikation ($r \times i$-te række): $r$ i stedet for 1 ved $_{ii}$: $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Rækkeaddition ($r \times i$-te række lægges til $j$-te række): $r$ i stedet for 0 ved $_{ji}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}$

## Elementære matricer er regulære

En elementær matrix er regulær. Dens inverse matrix er den elementære matrix som svarer til den omvendte rækkeoperation.

## Elementære matricer II
i forbindelse med rækkeoperationer

- Hver rækkeoperation svarer til multiplikation med en elementær matrix.
- Hvis $A$ og $B$ er rækkeækvivalente, så findes en regulær matrix $P$ således at $B = PA$.
  $P$ er produkt af flere elementære matricer (rækkeoperationer!)
- Det gælder specielt for den reducerede echelonmatrix $R$ svarende til $A$: $R = PA$.
- Søjlekorrespondens mellem søjler i rækkeækvivalente matricer $A$ og $B$:

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{b}_j \Leftrightarrow \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} c_j \mathbf{a}_j.$$

- En Pivotfri søjle er linearkombination af foranstående Pivotsøjler.

### Kriterier

- $A$ er rækkeækvivalent til identitetsmatricen $I_n$.
- $A$ har $n$ Pivot positioner (og dermed en i hver række, en i hver søjle).
- $\text{rang}(A) = n$.
- $A$s søjler er lineært uafhængige.
- $A$s søjler udspænder $\mathbf{R}^n$.
- $A$ kan skrives som produkt af elementære matricer.

# Sammensætning og inversion af linære afbildninger

## Definition

- Givet lineære afbildninger $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og $U : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$. Deres sammensætning er den lineære(!) afbildning $U \circ T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ givet ved $(U \circ T)(\mathbf{x}) = U(T(\mathbf{x})),\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
- Givet en bijektiv[a] lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Den har en invers lineær(!) afbildning givet ved $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \Leftrightarrow T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

[a] Ligningen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ har netop en løsning $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ for hver vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

## Standardmatricer for sammensætning og inverse

- Sammensætning svarer til matrixmultiplikation:

$$T = T_A, U = T_B \Rightarrow U \circ T = T_{BA}.$$

- Inversion af bijektive lineære afbildninger svarer til inversion af matricer: $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.