Matematik og Form
Splines. NURBS

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2013

Opgave: Find 3.grads polynomium

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ sål. at

$$\begin{aligned} y_b = p(0) &= a_0 \\ y_s = p(1) &= a_0 + \quad a_1 + a_2 + a_3 \\ h_b = p'(0) &= \qquad a_1 \\ h_s = p'(1) &= \qquad a_1 + 2a_2 + 3a_3 \end{aligned}$$

fører til et lineært ligningssystem.

Løsning

$$\begin{aligned} a_0 &= p(0) \\ a_1 &= p'(0) \\ a_2 &= -3p(0) + 3p(1) - 2p'(0) - p'(1) \\ a_3 &= 2p(0) - 2p(1) + p'(0) + p'(1) \end{aligned}$$

Hermitekurve

Dermed bestemmes polynomiet $p(t)$ ved indsætning af a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\begin{aligned} p(t) &= p(0) + p'(0)t + (-3p(0) + 3p(1) - 2p'(0) - p'(1))t^2 \\ &\quad + (2p(0) + 2p(1) + p'(0) + p'(1))t^3 \\ &= {}^1(1 - 3t^2 + 2t^3)p(0) + (3t^2 - 2t^3)p(1) \\ &\quad + (t - 2t^2 + t^3)p'(0) + (-t^2 + t^3)p'(1) \\ &= F_1(t)p(0) + F_2(t)p(1) + F_3(t)p'(0) + F_4(t)p'(1) \end{aligned}$$

Hermitepolynomier

$$F_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \qquad F_2(t) = 3t^2 - 2t^3$$
$$F_3(t) = t - 2t^2 + t^3 \qquad F_4(t) = -t^2 + t^3$$

De samme polynomier for hver opgave!
Det der ændrer sig (variable) er værdierne $p(0), p(1), p'(0), p'(1)$.

[1] Sortering!

Opgave: Find 3.grads parameterfremstilling

med vektorfunktion $\mathbf{p}(t)$, vektorer $\mathbf{a}_i$
$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$ sål. at

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_b = \mathbf{p}(0) &= \mathbf{a}_0 \\
\mathbf{P}_s = \mathbf{p}(1) &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \\
\mathbf{h}_b = \mathbf{p}'(0) &= \mathbf{a}_1 \\
\mathbf{h}_s = \mathbf{p}'(1) &= \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3
\end{aligned}$$

fører til et lineært ligningssystem

Løsning

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_0 &= \mathbf{p}(0) \\
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{p}'(0) \\
\mathbf{a}_2 &= -3\mathbf{p}(0) + 3\mathbf{p}(1) - 2\mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}'(1) \\
\mathbf{a}_3 &= 2\mathbf{p}(0) - 2\mathbf{p}(1) + \mathbf{p}'(0) + \mathbf{p}'(1)
\end{aligned}$$

Kubisk parameterfremstilling

Dermed bestemmes den kubiske parameterfremstilling $\mathbf{p}(t)$ ved ved indsætning af $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(0) + \mathbf{p}'(0)t + (-3\mathbf{p}(0) + 3\mathbf{p}(1) - 2\mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}'(1))t^2 \\ &\quad +(2\mathbf{p}(0) + 2\mathbf{p}(1) + \mathbf{p}'(0) + \mathbf{p}'(1))t^3 \\ &= (1 - 3t^2 + 2t^3)\mathbf{p}(0) + (3t^2 - 2t^3)\mathbf{p}(1) \\ &\quad +(t - 2t^2 + t^3)\mathbf{p}'(0) + (-t^2 + t^3)\mathbf{p}'(1) \\ &= F_1(t)\mathbf{p}(0) + F_2(t)\mathbf{p}(1) + F_3(t)\mathbf{p}'(0) + F_4(t)\mathbf{p}'(1)\end{aligned}$$

Hermitepolynomier

$$F_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad F_2(t) = 3t^2 - 2t^3$$
$$F_3(t) = t - 2t^2 + t^3 \quad F_4(t) = -t^2 + t^3$$

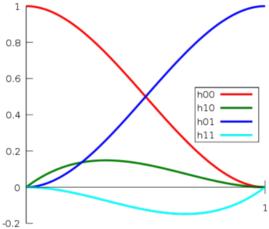
De samme polynomier for hver opgave!

Det der ændrer sig (variable) er: $\mathbf{p}(0), \mathbf{p}(1), \mathbf{p}'(0), \mathbf{p}'(1)$.

Hermitekurver
Kubiske parameterfremstillinger

Hermitepolynomier

$F_1(t) := 2t^3 - 3t^2 + 1$
$F_2(t) := -2t^3 + 3t^2$
$F_3(t) := t^3 - 2t^2 + t$
$F_4(t) := t^3 - t^2$



Hermitekurve $\mathbf{p}(t) = F_1(t)P_b + F_2(t)P_s + F_3(t)\mathbf{v}_b + F_4(t)\mathbf{v}_s$
3.grads kurve med begyndelses- og slutpunkt P_b, P_s samt begyndelses- og sluthastighedsvektor $\mathbf{v}_b, \mathbf{v}_s$.

Bézierkurver af orden 3

Kubiske Bernsteinpolynomier

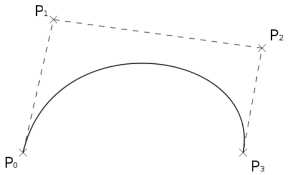
$B_{0,3}(t) := (1-t)^3 = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$

$B_{1,3}(t) := 3(1-t)^2 t := 3t^3 - 6t^2 + 3t$

$B_{2,3}(t) := 3(1-t)t^2 = -3t^3 + 3t^2$

$B_{3,3}(t) := t^3$

$B_{0,3} + B_{1,3} + B_{2,3} + B_{3,3} = 1$



$\mathbf{B}(t) = B_{0,3}(t)P_0 + B_{1,3}(t)P_1 + B_{2,3}(t)P_2 + B_{3,3}(t)P_3$

3. grads Bézierkurve til kontrolpunkterne P_0, P_1, P_2, P_3.

Hermitekurver

er 3.grads kurver som bestemmes ved
begyndelsespunkt P_b og slutpunkt P_s samt
begyndelseshastighed $\mathbf{v}_b$ og sluthastighed $\mathbf{v}_s$.

Bézierkurver af grad 3

bestemmes ved fire kontrolpunkter:
begyndelsespunkt P_0 og slutpunkt P_3 samt
to håndtag (eller magneter) P_1 og P_2.
Man kan specificere den samme 3.ordens-kurve både som Hermitekurve og som Bézierkurve.

Hermitekurve: endepunkter P_b, P_s, endehastighedsvektorer $\mathbf{v}_b, \mathbf{v}_s$.
Bézierkurve: kontrolpunkter P_0, P_1, P_2, P_3.
Hvis de skal bestemme samme 3. grads kurve:

$$F_1(t)P_b + F_2(t)P_s + F_3(t)\mathbf{v}_b + F_4(t)\mathbf{v}_s \overset{(*)}{=} B_{0,3}(t)P_0 + B_{1,3}(t)P_1 + B_{2,3}(t)P_2 + B_{3,3}(t)P_3.$$

Indsæt $t = 0$, $t = 1$: $P_b = P_0$, $P_s = P_3$ (samme endepunkter).
Indsæt $t = 0$, $t = 1$ i den afledede til ligning (*):

$$\mathbf{v}_b = -3P_0 + 3P_1 = 3\overrightarrow{P_0P_1} \qquad \mathbf{v}_s = -3P_2 + 3P_3 = 3\overrightarrow{P_2P_3}$$

Begynd.-hastighed	= 3· vektor mellem de to første kontrolpkter
Sluthastighed	= 3· vektor mellem de to sidste kontrolpkter

Kubiske splines

Mål: C^2-parameterfremstilling[2] for en kurve gennem punkter

$$P_0, P_1, \ldots, P_n.$$

Den består af n kubiske parameterfremstillinger (Hermite)

$$\mathbf{p}_1(t) \text{ gennem } P_0 \text{ og } P_1$$
$$\mathbf{p}_2(t) \text{ gennem } P_1 \text{ og } P_2$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{p}_n(t) \text{ gennem } P_{n-1} \text{ og } P_n.$$

C^2 svarer til : $\mathbf{p}_i'(1) = \mathbf{p}_{i+1}'(0) = \mathbf{v}_i$

$\mathbf{p}_i''(1) = \mathbf{p}_{i+1}''(0)$

Derudover ønskes: $\mathbf{p}_1''(0) = \mathbf{p}_n''(1) = \mathbf{0}$

(Krumning $= 0$ i P_0 og P_1.)

[2] C^2: 1. og 2. afledede kontinuert!

Oversættelse til lineær algebra

Ide: Find hastighedsvektorer $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sål. at

$$\mathbf{p}_1{}'(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{p}_i'(1) = \mathbf{p}_{i+1}'(0) = \mathbf{v}_i, \quad 0 \le i \le n-1, \quad \mathbf{p}_n'(1) = \mathbf{v}_n$$
$$\mathbf{p}_1{}''(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_i''(1) = \mathbf{p}_{i+1}''(0), \quad 0 \le i \le n-1, \quad \mathbf{p}_n''(1) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1{}''(0) = \quad \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 &&= 3\overrightarrow{P_0P_1} \\
\mathbf{p}_i''(1) = \quad \mathbf{p}_{i+1}''(0) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_{i-1} + 4\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1} &&= 3\overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}} \\
\mathbf{p}_n''(1) \quad = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_{n-1} + 2\mathbf{v}_n &&= 3\overrightarrow{P_{n-1}P_n}
\end{aligned}$$

Lineært ligningssystem: $(n+1)$ ligninger i $(n+1)$ ubekendte $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$

Koefficientmatriks $\mathbf{A}_{n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & . & . & . & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Beregning af hastighedsvektorerne

Hastighedsvektorerne $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ er løsningerne til:

$$\mathbf{A}_{n+1}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_0\\ \mathbf{v}_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathbf{v}_{n-1}\\ \mathbf{v}_n\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}\overrightarrow{P_0P_1}\\ \overrightarrow{P_0P_2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \overrightarrow{P_{n-2}P_n}\\ \overrightarrow{P_{n-1}P_n}\end{bmatrix} \leftarrow \text{højresiden}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{v}_0\\ \mathbf{v}_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathbf{v}_{n-1}\\ \mathbf{v}_n\end{bmatrix} = 3{\mathbf{A}_{n+1}}^{-1}\begin{bmatrix}\overrightarrow{P_0P_1}\\ \overrightarrow{P_0P_2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \overrightarrow{P_{n-2}P_n}\\ \overrightarrow{P_{n-1}P_n}\end{bmatrix}$$

Et simplet tilfælde: $n = 3$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$${\mathbf{A}_3}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, 3{\mathbf{A}_3}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(7\overrightarrow{P_0P_1} - 2\overrightarrow{P_0P_2} + \overrightarrow{P_1P_2}) \\ \frac{1}{2}(-\overrightarrow{P_0P_1} + 2\overrightarrow{P_0P_2} - \overrightarrow{P_1P_2}) \\ \frac{1}{4}(\overrightarrow{P_0P_1} - 2\overrightarrow{P_0P_2} + 7\overrightarrow{P_1P_2}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(5\overrightarrow{P_0P_1} - \overrightarrow{P_1P_2})^{3} \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_2} \\ \frac{1}{4}(5\overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{P_0P_1}) \end{bmatrix}.$$

---

[3] $7\overrightarrow{P_0P_1} - 2\overrightarrow{P_0P_2} + \overrightarrow{P_1P_2} = -7\overrightarrow{OP_0} + 2\overrightarrow{OP_0} + 7\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_1} - 2\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_2} = -5\overrightarrow{OP_0} + 6\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} = 5\overrightarrow{P_0P_1} - \overrightarrow{P_1P_2}$

Eksempel

3 punkter bestemmer 3 hastighedsvektorer

$P_0 : (4,0), P_1 : (0,4), P_2 : (4,4);$
$\overrightarrow{P_0P_1} = [-4,4], \overrightarrow{P_0P_2} = [0,4], \overrightarrow{P_1P_2} = [4,0];$
$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{4}([-20,20] - [4,0]) = [-6,5], \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}[0,4] = [0,2],$
$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{4}([20,0] - [-4,4]) = [6,-1].$

To Hermitekurver bestemmes

Nu indsættes $P_0, P_1, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ i parameterfremstilling $\mathbf{p}_1(t)$ for Hermitekurve nr. 1:
$\mathbf{p}_1(t) = (1-3t^2+2t^3)[4,0] + (3t^2-2t^3)[0,4] + (t-2t^2+t^3)[-6,5] + (-t^2+t^3)[0,2] = [4-6t+2t^3, 5t-t^3], t \in [0,1];$
og tilsvarende $P_1, P_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i parameterfremstilling $\mathbf{p}_2(t)$ for Hermitekurve nr. 2:
$\mathbf{p}_2(t) = (1-3t^2+2t^3)[0,4] + (3t^2-2t^3)[4,4] + (t-2t^2+t^3)[-0,2] + (-t^2+t^3)[6,-1] = [6t^2-2t^3, -4+2t-3t^2+t^3],$
$t \in [0,1].$

Kurver med $n+1$ kontrolpunkter

n-te ordens Bézierkurver

defineres ved hjælp af Bernstein-polynomier

$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ af grad n.

$$B_n(t) = B_{0,n}(t)P_0 + \cdots + B_{i,n}(t)P_i + \cdots + B_{n,n}(t)P_n.$$

B-splines

defineres ved hjælp af stykkevis polynomiale funktioner af grad k - som er 0 på en del af intervallet.

Sammenligning: Fordele og ulemper

	støttepunkter	grad	glathed	lokal kontrol
kubisk spline	alle	3	C^2	÷
Bézierkurve	endepunkter	n	C^∞	÷
B-spline	endepunkter	k	C^{k-2}	delvis[a]

[a] Kontrolpunkt har indflydelse på område svarende til $k+1$ punkter

Beskrivelse

- kontrolpunkter $Q_0, \dots, Q_n$ og kontrolpolygon
- grad $k-1$
- knot vektor
- vægte

NURB-Kurven (af orden k) er givet ved en (vektor-)parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t)Q_i$.

Egenskaber

NURB-kurven ligger altid i det konvekse hylster bestemt ved kontrolpunkterne – $\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) = 1$ for alle t:
Hver af (tal-)basisfunktionerne $N_{i,k}(t)$ er dels et polynomium af grad $k-1$, dels konstant lige med 0.
lokal kontrol: Hvert kontrolpunkt har kun indflydelse mellem fra en knude til og med de næste k styks.

Parametre

Basisfunktionerne lever på et (tids-) interval med knots på.
Knotvektoren er en (svagt) voksende følge knots som ligger på dette tidsinterval.
Antal: antal kontrolpunkterne + orden ($= k$)
uniform: Knots har ens afstand fra hinanden, ellers non-uniform.
Knots kan være multiple – og er det gerne i starten og slutningen – eller for at frembringe knæk[a].

[a] eng.: kink

Vægte

Til hvert kontrolpunkt Q_i kan man lade svare en vægt w_i.
Punkter med høj vægt tiltrækker kurven særlig meget.
Parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,k}(t) Q_i}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,k}(t)}$.
Derfor rational (=brøk)!
En særlig grund: Kun med brøker af denne form kan man beskrive cirkler, ellipser mv. eksakt!

Rhino og Grasshopper

Rhino

PointsOn	Kontrolpunkterne med
Dir	vandrende enhedstangentvektor
Curvature	vandrende krumningscirkel og beregning af krumningen
CurvatureGraphOn	Normalvektorfelt; længde = krumning. Antal normalvektorer kan indstilles.

Grasshopper

IntCrv	Interpolationskurve (spline), som går gennem de afsatte punkter.
V	Point Set (læses ind i Pt).
D	kurvens grad (helst ulige!, gerne 3 eller 5).
Crv	NURBS kurve
V og D	som for IntCrV