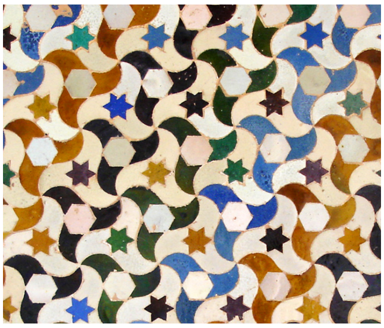
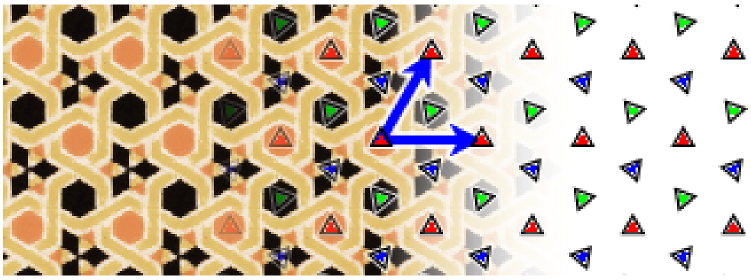
DET TEKNISK-NATUR-VIDENSKABELIGE FAKULTET
FØRSTE STUDIEÅR

AALBORG UNIVERSITET
ARKITEKTUR OG DESIGN
MATEMATIK: STRUKTUR OG FORM

MINIPROJEKT 3
17. MARTS 2014
MARTIN RAUSSEN

I dette miniprojekt undersøger vi matematikken bag regelmæssige 2D "tapet"-mønstre som for eksempel





En regelmæssig sekskant i planen har hjørner i punkter svarende til $\mathbf{t}_k = \begin{bmatrix}\cos(k\cdot 60^0)\\ \sin(k\cdot 60^0)\end{bmatrix}$, dvs. i
$\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{t}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}, \mathbf{t}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$,
$\mathbf{t}_3 = -\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_4 = -\mathbf{t}_1$ og $\mathbf{t}_5 = -\mathbf{t}_2$.
Sekskanten frembringer et gitter T bestående af alle vektorer på formen $k\mathbf{t}_0 + l\mathbf{t}_2, k, l \in \mathbf{Z}$ hele tal.

1. Check at $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_2$ og tegn de seks vektorer hvis spidser danner den regelmæssige sekskant.
2. Tegn et udsnit af gitteret T.

En drejning om Origo med vinklen θ er beskrevet på formen $\mathbf{x} \mapsto A_\theta\mathbf{x}$ med
$A_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$.
En plan transformation som overfører et mønster (som i illustrationen) i sig selv er på formen $D(\mathbf{x}) = A_\theta\mathbf{x} + \mathbf{t}$ – først en drejning med vinkel θ om Origo, så en parallelforskyding med vektoren $\mathbf{t} \in T$ i gitteret.

3. Gør rede for at D er en drejning med vinklen θ om punktet P_0 med stedvektoren $\mathbf{x}_0 = (I_2 - A_\theta)^{-1}\mathbf{t}$.[1,2]
4. Beregn $(I_2 - A_\theta)^{-1}$ for $\theta = 120^0$. Gør rede for at $(I_2 - A_{120^0})^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}A_{30^0}$; en kombination af en drejning med vinklen 30^0 med en skalering.[3]

Symmetrigruppen for et (tapet)mønster af typen $p3$ (som i illustrationen ovenfor) består af alle parallelforskydninger på formen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t}$ med $\mathbf{t} \in T$ en gittervektor, og af alle drejninger(!) på formen $D(\mathbf{x}) = A_\theta\mathbf{x} + \mathbf{t},\ \theta = 120^0$ eller $\theta = 240^0$ og $\mathbf{t} \in T$.

5. Find stedvektorene til omdrejningspunktene $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ for $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 = [1, 0]^T$ og $\mathbf{t} = 2\mathbf{t}_0 = [2, 0]^T$ og $\theta = 120^0$.
   Gør rede for at disse omdrejningspunkter deler diagonalen i gitterparallelogrammet med hjørner i $\mathbf{0}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_1$ mellem $\mathbf{0}$ og $\mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_1$ i tre lige store dele.
   Find parallelogrammet og omdrejningspunkterne i figuren ovenfor.

Heraf kan man udlede at man kan udfylde en firkant med hjørner i punkterne med stedvektorer $\mathbf{t}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1, \mathbf{x}_2$ som man vil. Resten af mønstret fyldes op ved hjælp af al-

[1] I_2 står for en 2D-identitetsmatrix.
[2] Vink: I miniprojekt 1 fandt vi en sammenhæng mellem omdrejningspunkt givet ved $\mathbf{x}_0$ og vektoren $\mathbf{t}$.
[3] Vink: $\cos 120^0 = \frac{-1}{2}, \sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^0 = \frac{1}{2}$.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN

le parallelforskydninger og drejninger beskrevet ovenfor.

6. Tegn og forklar! Denne webside kan sikkert hjælpe med ideer.[4].
7. Grasshopper og Rhino: Se denne vejledning.

Litteratur

Wikipedia Wallpaper group

I miniprojektet skal I demonstrere en række færdigheder. Her kommer en checkliste:

Matematik:

- Drejningsmatricer
- Inverse matricer (i 2D)
- Rotationer, translationer, mønstre
- Matrixregning og geometrisk forståelse

Grasshopper:

- Rotatiooner og translationer i Grasshopper
- Grasshopper's datastruktur "tree"
- Nye komponenter

[4]Klik p3 og tegn noget småt med musen