

Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 3.

Forelæsnings 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 3.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsnings 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 3.

Næste gang:

Onsdag, 12.2., kl. 8:15 – 12:00; forelæsninger i Auditorium 4.

Løsning af lineære ligningssystemer ved hjælp af Gauss-algoritme. Parameterfremstilling for løsningsmængden.

Mål og indhold:

Repetition:

Vektorer. Prikprodukt, krydsprodukt og geometriske anvendelser. Matricer.

Nyt stof:

Linearkombinationer:

Hvordan kan man kombinere sig frem fra få vektorer til mange andre? **Linearkombinationer** af vektorer kan udspænde en hel plan, hele rummet eller faktisk endnu "større" lineære verdener. Når man beskriver en vektor ved hjælp af koordinater, så skriver man den faktisk som linearkombination af **standard enhedsvektorerne**. Vi skal bruge linearkombinationer fortrinsvis til at beskrive planer i rummet.

Produkt mellem matrix og vektor:

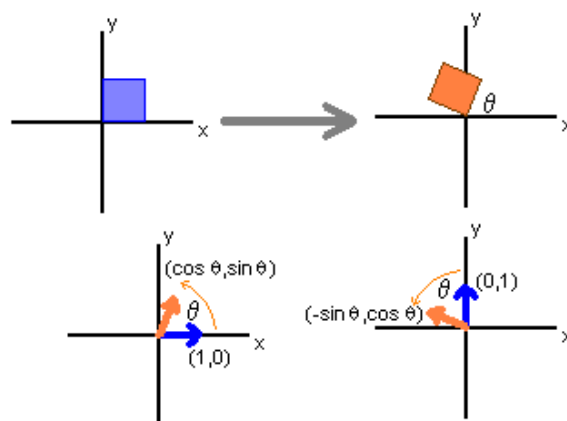
En linearkombination kan "kodes" som produkt af en matrix (hvis søjler indeholder de udspændende vektorer) og en vektor som indeholder "vægtene":

Produktet $A\mathbf{v}$ af en $m \times n$ -matrix A og en $n \times 1$ -rækkevektor \mathbf{v} er en $m \times 1$ -vektor som beregnes som linearkombination af

As søjlevektorer givet ved \mathbf{v} s koefficienter. Se definitionen på p. 19 i lærebogen.

Vi undersøger produktet med specielle matricer:

- Enhedsmatricen¹ I_n er en $n \times n$ -diagonalmatrix med 1-taller på diagonalen. Der gælder $I\mathbf{v} = \mathbf{v}$ for alle $n \times 1$ -vektorer \mathbf{v} .
- Multiplikation med en (2×2) -**rotationsmatrix** A_θ : For en (2×1) -søjlevektor beskriver $A_\theta\mathbf{v}$ den vektor man får ved at dreje \mathbf{v} vinklen θ ² mod uret.



¹også kaldet identitetsmatrix; eng.: identity matrix

²græsk, det udtales "teta"

Vi begynder nu med at se på den vigtigste anvendelse af matricer og vektorer:

Lineære ligningssystemer:

Mange spørgsmål i ingeniørvidenskaberne, naturvidenskaberne, økonomi mv. fører i sidste ende til **lineære ligningssystemer**, et antal lineære ligninger i et antal variable (= ubekendte). I kender til metoder til at løse **to** lineære ligninger i **to** variable fra gymnasiet.

Vi beskæftiger os med metoder til at **løse** systemer af m lineære ligninger i n variable – hvor m, n er vilkårlige positive heltal. Som det første spørger man om et sådant ligningssystem i det hele taget har en løsning (om det er **konsistent**); og hvis ja, om det har **én** eller **flere** løsninger – og hvordan man kan beskrive løsningerne på en simpel form.

Et lineært ligningssystem er fuldstændigt beskrevet ved dets **koefficientmatrix**³ og **højresiden** i systemets **totalmatrix**⁴. Målet er at bestemme **løsningsmængden** bestående af alle løsninger til ligningssystemet.

Rækkeoperationer: For at løse et lineært ligningssystem gennemfører man et antal **rækkeoperationer** på den tilsvarende totalmatrix. Den oprindelige matrix og den man får efter at have gennemført en eller flere rækkeoperationer kaldes **rækkeækvivalente**. Det er væsentligt at indse, at **rækkeoperationerne bevarer løsningsmængden**, dvs. at ligningssy-

stemer svarende til rækkeækvivalente matricer har den **samme løsningsmængde**.

Nu gælder det om at overføre en matrix til en anden simple matrix på **”trappeform”**⁵ ved hjælp af rækkeoperationer. Ligningssystemet svarende til en totalmatrix på trappeform kan nemt løses, én ligning og én variabel ad gangen, ved **baglæns substitution**⁶.

Selve udregning overlades som regel i praksis til lommeregner eller computerprogram. Men det er vigtigt at forstå fremgangsmåden og beskrivelsen af løsningsmængden!

Litteratur:

MF Ch. 1.2 – 1.3, pp. 13 – 33.

Komp 4, 6 – 8, 10.

Wikipedia Systems of linear equations

Wikipedia Linear combination

Webdemos:

Denne webside demonstrerer udregning af produktet mellem en matrix og en vektor. Eller denne her – uden mange ord.

På denne webside kan man øve sig i at gennemføre rækkereduktioner på systematisk vis; man skal selv angive hvilke rækkeoperationer der skal udføres; udregningen klares automatisk!

³eng.: coefficient matrix

⁴eng.: augmented matrix

⁵eng.: echelon form

⁶eng.: back substitution

Opgaver:

ME, Ch. 1.2, pp. 25 – 26 Matrix vektor
produkt (se evt. denne pencast): 1,
3, 5, 7, 9, 11.
Rotationsmatricer: 17.

med specielle matricer: Prøv først at
overbevise jer med nogle eksempler;
kan I finde beviser også?
69, 71, 75, 79, 81⁷

ME, Ch. 1.1, pp. 11 – 13 Hjernegymnastik

Facit til disse opgaver findes i bogen på
pp. 239 ff.

⁷Vink:

69 $i \neq j \Rightarrow b_{ij} = 0$

75 Indgang (koefficient) c_{ij} for matricen $C = B + B^T$: $c_{ij} = b_{ij} + b_{ji}$

81 $2A = (A + A^T) + (A - A^T)$