

Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 4.

Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 4.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 11:25 – 12:00 i Auditorium 4.

Næste gang:

Fredag, 14.2., 12:30 – 16:15.

Forelæsninger i Auditorium 4.

Lineære afbildninger og standardmatricer.

Mål og indhold:

Repetition:

Løsning af lineære ligningssystemer. Beskrivelse af løsningsmængden på parameterform.

Nyt stof:

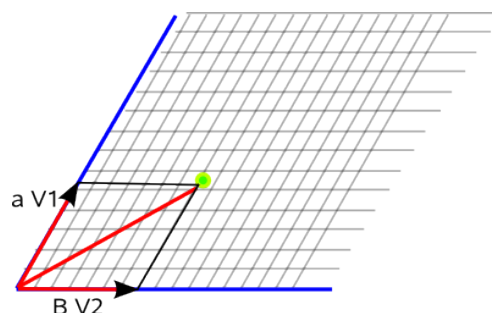
Nu skal vi til at knytte en række begreber fra den geometriske og den algebraiske verden sammen:

1. linearkombinationer og spænd (geometri)
2. vektorligninger (algebra)
3. matrixligninger (algebra) og
4. (de kendte) lineære ligningssystemer (regnemetode).

Spænd: Mængden af alle **linearkombinationer** $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$ med reelle koefficienter (eller vægte) af et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ i \mathbf{R}^n kaldes vektorernes **spænd**¹ $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} \subset \mathbf{R}^n$ – og vektorerne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ **frembringer**² dette spænd.

¹eng.: span

²eng.:generate



Spændet har **geometriske interpretation**: Spændet af én vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ svarer til vektorerne på en ret linie med retningsvektor \mathbf{v} gennem Origo. Spændet af to vektorer svarer typisk, men ikke altid, til en plan gennem Origo (og ikke, hvad mange fejlagtigt tror, til det område "mellem" de to vektorer; det drejer sig om en **hel plan!**)

Vektorligninger: Er en given vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ indeholdt i spændet $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}$? Svaret findes ved at løse **vektorligningen** $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$, eller et ækvivalent **lineært ligningssystem** hvis totalmatrix har **søjler** $[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p \mid \mathbf{b}]$. Vektoren er indeholdt i spændet hvis og kun hvis dette ligningssystem er **konsistent**.

Hvornår er spændet af p vektorer i \mathbf{R}^m lig med hele rummet \mathbf{R}^m ? For at teste dette, indsætter man vektorerne som

søjlevektorer i matrixen $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p]$. Hvis rangen for denne matrix opfylder $\text{rank}(A) = m$ – en Pivotposition i hver række – så kan man løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for **en- hver** højreside $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$; og ellers ikke!

Vi skal nu undersøge hvor mange vektorer man skal bruge for at udspænde en plan, rummet eller evt. større "hyperrum".

1. Hvornår udspænder et antal vektorer hele \mathbf{R}^n – dvs. alle vektorer med m koefficienter? Sæt vektorerne i en matrix. Denne matrix skal have rang m – **Pivoter** i hver **række** (Theorem 1.6)
2. Hvornår kan man udelade den sidste vektor i en liste uden at spændet bliver mindre? Det kan man når den sidste vektor er indeholdt i spændet af de forudgående (Theorem 1.7)
3. En vektor i spændet er en linearkombination $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$. Er koefficienterne c_1, \dots, c_k entydigt bestemt – har \mathbf{v} en entydig "adresse"?

Det sidste spørgsmål fører til definition for lineær **uafhængighed** og **afhængighed** – hvor man undersøger spørgsmål (3) for $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

En mængde vektorer $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ kaldes **lineært afhængig**³, hvis vektorligningen (afhængighedsrelationen)

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

har **andre** løsninger end den *trivielle* løsning $c_1 = \cdots = c_k = 0$ – og **lineært uafhængig** ellers.

En lineært afhængig mængde af vektorer har den egenskab at (mindst) en af vektorerne kan udtrykkes som linearkombination af de andre. Denne vektor kan derfor udelades, hvis man vil udtrykke spændet

af vektorerne $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ så økonomisk som muligt.

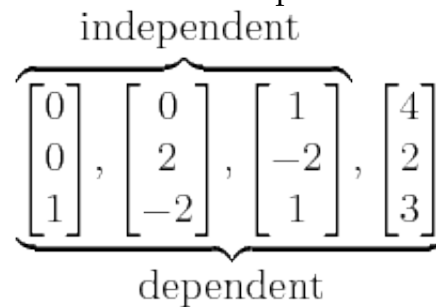
Hvornår er op til tre vektorer lineært uafhængige?

Én vektor \mathbf{v} er lineært **afhængig**, hvis den er lig med $\mathbf{0}$ -vektoren - ellers er den lineær **uafhængig** og udspænder en linje.

To vektorer er lineært **afhængige** hvis de er parallelle. I så fald udspænder de kun en linje – med mindre begge to er nulvektorer; hvis vektorerne er lineært **uafhængige**, så udspænder de en plan.

Tre vektorer i rummet udspænder hele rummet hvis og kun hvis de er lineært **uafhængige**; er de lineært **afhængige**, udspænder de noget mindre: en plan, en linje eller bare nulrummet.

Generelt er et antal vektorer lineært **uafhængige**, hvis enhver vektorer i deres spænd er en **entydig** linearkombination af disse vektorer; hver vektor har kun en adresse i det "lineære postvæsen"!



Metode: Hvordan finder man ud af om en mængde vektorer er lineært **uafhængig**? Man indsætter vektorerne som søjler i en matrix A . Vektorerne er lineært **uafhængige** hvis **hver** søjle i denne matrix A er en **Pivotsøjle** – for så har matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En god sammenfatning med al den information som er gemt i **rangen** af en matrix A findes i lærebogen på side 83.

³eng.: linearly dependent/independent

Litteratur:

MF Ch. 1.6 – 1.7, pp. 66 – 83.

Komp p. 4.

Wikipedia Linear span

Wikipedia Linear independence

Opgaver:

MF, Ch. 1.4, pp. 52 – 54 Ligningssystemer,
konsistens, løsningsmængde:
5, 9, 15, 31.⁴
Rang og nullitet: 35.
En anvendelse: 47.⁵

Quiz: 75, 77, 93.⁶

MF, Ch. 1.6, pp. 72 – 74 Er vektor inde-
holdt i spænd? 7, 13, 27.
Find mindre uspændende mængde:
43.

⁴Man løser ligningssystemer med ubekendte (her r) på samme måde som når man har det med tal at gøre

⁵Indsæt tre x -værdier og kom frem til tre ligninger i de ubekendte a, b, c

⁶Beregn $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$.