Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 3.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 3.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 3.

Næste gang:

Onsdag, 26.2, 8:15 – 12:00 i Auditorium 4. Matrices and Transformations in Grasshopper.

Mål og indhold:

Repetition:

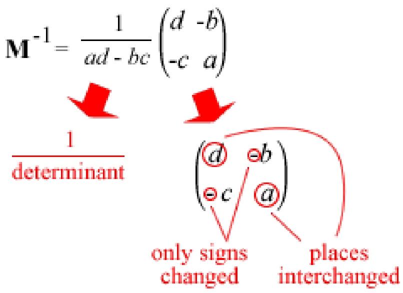
Matrixmultiplikation. Sammensætning af lineære afbildninger.

Nyt stof:

Inverse afbildninger og matricer: I det følgende koncentrerer vi os om kvadratiske matricer med samme antal søjler som rækker. Hvis A er en $(n \times n)$-matrix, har den så en invers matrix C, således at $AC = CA = I \leftarrow$ identitetsmatrix[1]? I så fald kaldes A regulær – eller også invertibel, og man indser at der så kun findes én matrix C med $AC = I$. Det er den man kalder for As inverse, og man betegner den med A^{-1}.

Interpretation: Hvis A er regulær, så har den lineære afbildning svarende til A har en invers lineær afbildning: "undo"! for lineære afbildninger, tilbage til udgangspunktet!

Mange matricer A er regulære, men ikke dem allesammen. For (2×2)-matricer finder man nemt en formel for den inverse matrix A^{-1}, hvis matricen A opfylder: $\det A \neq 0$ (og hvis $\det A = 0$ så er A ikke regulær!)



Generelt gælder det at matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ altid har netop én løsning når A er regulær. Hvorfor?

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Konklusion: En $n \times n$- matrix A er regulær netop når alle søjler (og dermed alle rækker) har en Pivot-position, dvs. hvis A har rang n.

Matrixinversion: Hvordan beregnes den inverse matrix til et produkt af to invertible matricer? til den transponerede af en invertibel matrix? Se Theorem 2.2 (p. 125) og overvej hvorfor man skal bytte om på rækkefølgen i (b).

Der findes en simpel opskrift som tillader på samme tid at afgøre om en given $(n \times n)$-matrix A er invertibel og i givet fald at finde den inverse matrix (den er dog kun praktikabel for et menneske hvis n er af moderat størrelse):
Man danner den udvidede $n \times 2n$-matrix

[1] I definitionen for den inverse matrix C til en matrix A kræves der: $AC = CA = I$. Man kan faktisk nøjes med kun at kræve en af delene, og den anden gælder automatisk.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
-
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.AAU.DK/~RAUSSEN

$[A|I_n]$ – med den n-dimensionelle identitetsmatrix I_n på højresiden – og gennemfører rækkeoperationer på denne nye større matrix indtil man opnår en reduceret echelonmatrix. Matricen A er invertibel hvis og kun hvis denne matrix er rækkeækvivalent til en matrix på formen $[I_n|C]$ - altså skal A have Pivotelementer i hver søjle og dermed hver række. I så fald finder man den inverse matrix på højresiden:

$$A^{-1} = C.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 - 4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Vi giver to begrundelser for gyldigheden af opskriften for inversion af matricer:

1. Ligningen $AC = I$ kan opfattes som en samling af n matrixligninger med ubekendte søjlevektorer $\mathbf{c}_i$: $A\mathbf{c}_i = \mathbf{e}_i$ med $C = [\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n]$ og $I_n = [\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n]$. Disse n ligninger løses simultant ved ovenstående opskrift.

2. En rækkeoperation kan opfattes som multiplikation med en elementær matrix ([MF], p. 126). A er derfor regulær hvis og kun hvis der findes elementære matricer $E_1, \ldots, E_k$ således at $E_k \cdots E_1 A = I_n$.
   I så fald gælder:
   $$A^{-1} = E_k \cdots E_1 = E_k \cdots E_1 I_n,$$
   dvs. man kommer frem til A^{-1} ved at bruge de samme rækkeoperationer på I_n som dem der bruges for at nå fra A til I_n.
   Bemærk at en elementær matrix svarende til en rækkeaddition har en vridning (shear) som geometrisk interpretation.

Der findes mange forskellige kriterier til at beskrive/afgøre om en given kvadratisk matrix er invertibel; de er sammenfattet i Theorem 2.6, pp. 138.

Litteratur:

MF Ch. 2.3 – 2.4, pp. 120 – 137.

Wikipedia Invertible matrix

Software:

- Matrix Inverse
- Matrix Calculator Applet
- Find the Inverse Matrix

Opgaver:

Ch. 2.1, pp. 102 – 104 Matrixprodukt: 31 (beregn den komplette matrix CA)
Quiz: 33 – 50
Udfordringer: 59[2] , 63[3]

Ch. 2.3, pp. 128 – 132 Check inverse: 3[4]
Bestem inverse uden at regne, tænk på den inverse/omvendte transformation: 15, 17, 19, 21.

Ch. 2.4., pp. 140 – 143 Små inverse: 3, 5.

[2] Beregn (i, j)-koefficienten i produktmatricen for $i < j$

[3] Prøv med 2×2-matricer som hver især indeholder et 1-tal og ellers kun 0-taller.

[4] Man behøver ikke at beregne A^{-1}. Hvad betyder det at B er As inverse?