

## Køreplan:

### Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 4.

### Forelæsnings 1. del:

kl. 8:50 – 9: 25 i Auditorium 4.

### Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

## Forelæsnings 2. del:

kl. 11:25 – 12:00 i Auditorium 4.

### Næste gang:

Mandag, 17. marts, kl. 12:30 – 16:15.

Miniprojekt 3. Introduktion i Auditorium 3  
fra kl. 12:30.

## Mål og indhold:

### Repetition:

Vektorfunktioner som parameterfremstillinger for kurver i plan og rum.

Differentiation og integration af vektorfunktioner.

### Nyt stof:

Ved differentiation af en parameterfremstilling finder man den (variable) hastighedsvektor, og som dens længde, farten som funktion af tiden. Ved at integrere farten fra start til slut, finder man **længden** af den tilbagelagte vej; desværre er formlerne dog ofte så inviklede, at man ikke kan integrere eksplicit.

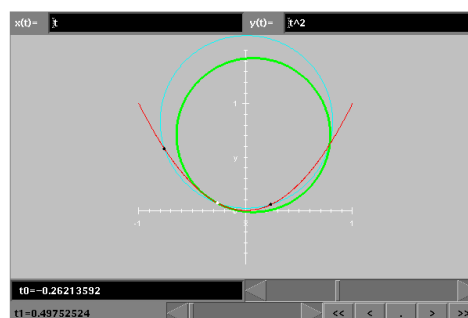
Hvordan kan man måle/beregne, hvor **krum** en kurve er i et givet punkt? Det er rimeligt at sætte krumningen<sup>1</sup> af en cirkel med radius  $R$  til  $\frac{1}{R}$ . For en generel kurve sætter man den til krumningen af den bedst approksimerende cirkel i et givet punkt, den såkaldte **krumningscirkel**<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>eng.: curvature

<sup>2</sup>eller oskulationscirkel; eng.: osculating circle

### Approximating circles and osculating circle

The green circle is the *osculating circle* at the white point. The light blue (cyan) circle is the circle through the white and the two black points. When the black points converge to the white one (use the player), this approximating circle converges to the osculating circle. You may choose another (white) point using the scroller.



Det samme mål fås hvis man differentierer den vandrende enhedstangentvektor  $T(s)$  langs med kurven med hensyn til **kurvelængden**  $s$ . Når man sætter  $T(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$ , så måler  $\varphi(s)$  vinklen mellem X-aksen og  $T(s)$ . Krumningen kan tydes som **vinkelhastighed**  $\varphi'(s)$ . Krumningen for en plan kurve beregnes ved hjælp af formel (12) på s. 285. Det er dog smartere hvis man lader være med at tage den numeriske værdi i tælleren: Så finder man tillige ud af om kurven krummer **med** eller **mod** uret.

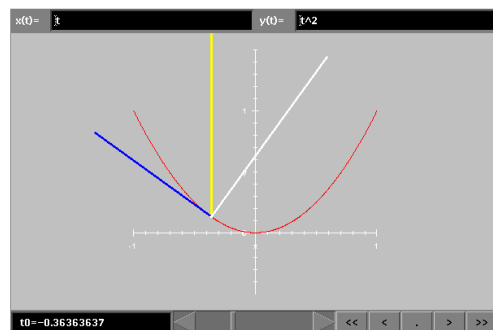
Ved hjælp af krumningen kan man give en bedre beskrivelse for den vandrende

accelerationsvektor  $\mathbf{a}(t)$ . Hvis man – for en plan kurve – definerer  $\mathbf{N}(t) = \hat{\mathbf{T}}(t)$  som vandrende **normal**vektor, så har accelerationen en **tangential** og en **normal** komponent:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v^2(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t); \quad (1)$$

#### Tangential and normal components of the acceleration

The moving acceleration vector  $\mathbf{a}$  in yellow, its tangential component in blue, its normal component in white.



Formlen (1) stemmer også for en rumkurve, blot skal  $\mathbf{N}$  så findes som en enhedsvektor i retning af  $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ . Specielt kan man se, at

- høj fart kombineret med stor krumning udløser problematisk store nor-

malkræfter – derfor bremser man ned i hårnålesving!

- Et pludseligt skifte i krumningen medfører et pludseligt problematisk skifte i normalkræfterne og skal derfor undgås i bevægelige systemer.

Endelig kan formel (1) også bruges til at bestemme krumningen for en rumkurve, se formel (27) på s. 290.

#### Litteratur:

MF Sect. 11.6, pp. 283 – 291.

Wikipedia Curvature

#### Software:

- A Geometric Laboratory
- The Length of a Parametric Curve
- Tangent Circles and the Curvature of a Function

#### Opgaver:<sup>3</sup>

Integration MF, 11.5, pp. 280 – 283: 27<sup>4</sup>, 33<sup>5</sup>.

Anvendelser MF, 11.5: 61, 49<sup>6</sup>.

Kurvelængde MF, 11.6, pp. 295 – 297: 1, 3<sup>7</sup>, 5.

Krumning MF, 11.6: 9<sup>8</sup>, 11<sup>9</sup>.

<sup>3</sup>Facit: p. 384

<sup>4</sup> $\mathbf{a}(t) = [2, 0, -4]$ ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_0 = [0, 10, 0]$

<sup>5</sup> $\mathbf{a}(t) = [\cos(t), \sin(t), 0]$ ,  $\mathbf{r}_0 = [0, 1, 0]$ ,  $\mathbf{v}_0 = [-1, 0, 5]$

<sup>6</sup>Bestem først  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{r}_0$  og sæt  $\mathbf{v}_0 = [v_0, 0]$  Bestem herefter  $v_0$ .

<sup>7</sup>Produktformel for differentiation!

<sup>8</sup>Find først en parameterfremstilling  $[x(t), y(t)]$  for kurven

<sup>9</sup>en ellipse!