Matematik: Struktur og Form
Intro til vektorer og matricer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2014

Operationer med vektorer

Definition

Givet vektorer $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n], \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$.

Addition: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n]$.

Multiplikation med tal c: $c\mathbf{u} = [cu_1, \dots, cu_n]$.

Prikprodukt: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots u_n v_n$.

Norm/længde: $\| \mathbf{u} \|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots u_n^2$.

Afstand: mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$: $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$.

Krydsprodukt ($n = 3$):

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1].$$

Ortogonale vektorer

- Vektorerne $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er **ortogonale** hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
- ($n = 2$:) Vektoren $\hat{\mathbf{u}} = [-u_2, u_1]^T$ er ortogonal på $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$.
- ($n = 3$:) Vektoren $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ er ortogonal på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Prikprodukt og geometri

Regneregler

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \| \mathbf{u} \|^2$
2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$
3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
5. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
6. $\| c\mathbf{u} \| = |c| \, \| \mathbf{u} \|$
7. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \cos \alpha$

Uligheder

Cauchy-Schwarz: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|$

Vinkel α mellem **u** og **v**: $\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$

Trekant: $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|$

Ortogonalprojektion og afstand

Givet en linje l ved retningsvektor $\mathbf{v}$ og en vektor $\mathbf{u}$.
Ønskes: $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$, $\mathbf{w} \| \mathbf{v}, \mathbf{z} \perp \mathbf{v}$.
Løsning: $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$; $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$.
Afstand fra P i spidsen af $\mathbf{u}$ til l: $\| \mathbf{z} \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{w} \|$.

Vektorer og matricer

Søjle- og rækkevektorer

$$\mathbf{r} = [r_1 \; r_2 \; \cdots \; r_n] \in \mathbf{R}^n; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^m.$$

$m \times n$-matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

$a_{ij} \in \mathbf{R}$ indgang (eller koefficient) i i-te række og j-te søjle.

Matrixregning 1

Regler for addition og multiplikation med skalar

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$
5. $(st)A = s(tA)$
6. $s(A + B) = sA + sB$
7. $(s + t)A = sA + tA$

Definition

Givet en $m \times n$-matrix $A = [a_{ij}]$.
Den transponerede matrix A^T er $n \times m$-matricen $A^T = [a_{ji}]$.
Rækkerne i A^T er lig med As søjler. Søjlerne i A^T er lig med As rækker.

Regler for transposition

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(sA)^T = sA^T$
3. $(A^T)^T = A$

Linearkombinationer. Spænd

Givet et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
En vektor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n,\ c_i \in \mathbf{R}$, kaldes en linearkombination af vektorerne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
Vektorernes spænd er mængden af alle deres linearkombinationer:

$$Span\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} := \{c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \mid c_i \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n.$$

1D – 2D

1. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow Span\{\mathbf{a}\} = \{c\mathbf{a} \mid c \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$
   vektorer på en linje gennem Origo med retning $\mathbf{a}$.
2. $Span\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$
   vektorer i en plan med retningsvektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$
   – med mindre $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ligger på én linie.

Bemærk: en hel plan, ikke bare en kvadrant!

Definition

A en $m \times n$-matrix, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \rightsquigarrow A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$.

$$A = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

er linearkombinationen af As søjlevektorer $\mathbf{a}_i$ med vægte x_i.

Den i-te indgang (koefficient) i resultat-vektoren $A\mathbf{x}$:

$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n =$

prikprodukt $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ \cdots \\ a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ mellem As i-te rækkevektor og $\mathbf{x}$.

Specielle vektorer og matricer

Nulmatricen

$m \times n$ matricen O: alle koefficienter $o_{ij} = 0$.

Identitetsmatricen

$n \times n$-matricen I_n har 1-taller på diagonalen og 0-taller udenfor. Dens søjlevektorer er standard enhedsvektorerne $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \in \mathbf{R}^n$.
$I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

2D rotationsmatricer

For en vinkel θ (teta) sættes $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

For en vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ gælder:
$A_\theta\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ er den vektor der fås ved at dreje vektoren $\mathbf{v}$ vinklen θ om Origo (mod uret!)

Matrix vektor produkt

Egenskaber

1. $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
2. $A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$
3. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$
4. $(A+B)\mathbf{u} = A\mathbf{u} + B\mathbf{u}$
5. $O\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$
6. $I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$
7. $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$ – den j-te søjlevektor
8. $B\mathbf{w} = A\mathbf{w}$ for alle vektorer $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n \Rightarrow B = A$