

# Matematik og Form

## Lineære ligningssystemer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag  
Aalborg Universitet

2014

# Ligningssystemer og matricer

Til et ligningssystem svarer der en **totalmatrix**  $[A|\mathbf{b}]$  bestående af **koefficientmatrix**  $A$  og **højreside**  $\mathbf{b}$ .

Omvendt oversættes totalmatricen  $[A|\mathbf{b}]$  til **matrixligningen**

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ med den ubekendte vektor } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \text{et lineært}$$

**ligningssystem** “på kort form”.

# Elementære rækkeoperationer

på ligningssystemer og matricer

**ledende koefficient** i en række: det første element  $\neq 0$ !

| Navn                        | Formål (i en søjle)                      |
|-----------------------------|------------------------------------------|
| Række <b>ombytning</b>      | ledende koefficient op, 0-taller ned!    |
| Række <b>addition</b>       | 0-taller under/over ledende koefficient! |
| Række <b>multiplikation</b> | ledende koefficient 1!                   |

To matricer kaldes **rækkeækvivalente** hvis man kan overføre den ene i den anden ved en eller flere elementære rækkeoperationer.

**Hvorfor?** To ligningssystemer svarende til rækkeækvivalente totalmatricer har **samme løsningsmængde**!

Hvad kan man opnå gennem systematisk anvendelse af rækkeoperationer?

# Echelon-matricer

## Matricer på trappeform

### Række Echelon-matricer

En matrix på **echelonform** har

- 1 alle 0-rækker **nederst**.
- 2 De ledende koefficienter (først i rækken  $\neq 0$ ) flytter **til højre** når man vandrer ned ad rækkerne.  
(Konsekvens: I området **under og til venstre for** en ledende koefficient står der **kun 0-taller**).

### Reducerede række Echelon-matricer

En matrix på **reduceret echelonform** opfylder desuden:

- 1 Ledende koefficienter  $= 1$  – kaldes **Pivoter**.
- 2 Også **over** Pivoter står der kun 0-taller.

En matrix kan ved rækkeoperationer overføres til forskellige matricer på echelonform, men kun til **en** matrix på reduceret echelonform.

# Rækkereduktion til echelonform

Gauss-algoritmen (forlæns)

Algoritmen (regnemethoden) går igennem matrixens søjler **fra venstre til højre**. Den bruger

**r-ombytning** for at opnå at ledende koefficienter længst til venstre optræder i rækken **lige under** den sidst opnåede Pivotposition

**r-addition** for at opnå at der kun står **0-taller under** denne ledende koefficient.

I hver søjle: højst en ombytning, men ofte flere additioner.

Resultat: En **rækkeækvivalent** matrix **på echelonform**.

# Rækkereduktion til reduceret echelonform

Gauss-Jordan-algoritmen (baglæns)

Algoritmen fortsætter fra en matrix på echelonform. Den går igennem Pivotelementer fra venstre til højre og bruger

**r-multiplikation** for at opnå at Pivotelementet bliver 1.

**r-addition** for at opnå at der også står **0-taller over** Pivotelementet.

Resultat: **Den** rækkeækvivalente matrix **på reduceret echelonform**.

Oversæt (baglæns) til et simpelt ligningssystem.

Isoler de bundne variable (Pivotsøjler)– udtryk dem ved hjælp af de fri variable (søjler uden Pivot).

Overfør udtrykkene til en parameterfremstilling for løsningsmængden.

# Løsningsmængden $L$ for et lineært ligningssystem I

“The general solution”

Løsningsmængden beskriver alle løsninger:

$$L = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \text{ opfylder alle } m \text{ ligninger}\} \subset \mathbf{R}^n$$

- Hvis en rækkeækvivalent echelonmatrix indeholder en række på formen  $[00 \dots 0 | c]$  med  $c \neq 0$ , så er systemet **inkonsistent** – ingen løsning –  $L = \emptyset$ .
- Hvis ikke, så svarer hver Pivotsøjle (som indeholder en ledende koefficient) til en **bunden** variabel og hver af de andre til en **fri** variabel.
- Er der **kun** bundne variable, så har systemet en **entydig** løsning –  $L$  har netop **ét** element  $[x_1, \dots, x_n]$ . Denne løsning findes umiddelbart ud fra den reducerede echelonmatrix.

# Løsningsmængden $L$ for et lineært ligningssystem II

Frie variable – bundne variable

- Frie variable kan antage vilkårlige reelle tal som værdier, uafhængigt af hinanden.
- De bundne variable udtrykkes som linearkombinationer af de frie – ved substitution med udgangspunkt i echelonmatrix.  
Resultat: en parameterfremstilling for løsningsmængden  $L$ .
- $L$  har uendelig mange løsninger hvis et konsistent system giver anledning til en eller flere frie variable (søjler uden Pivot).

# Fra ligningssystem til løsningsmængde

Trin for trin

- ➊ Overfør ligningssystemet til (udvidet) matrix
- ➋ Rækkereduktion  $\rightsquigarrow$  matrix på **echelonform**
  - ➊ Er højresiden en Pivotsøjle (er der en ledende koefficient i sidste søjle)? Systemet er **inkonsistent. Stop!**
  - ➋ Ellers er systemet **konsistent. Fortsæt!**
- ➌ Rækkereduktion  $\rightsquigarrow$  matrix på **reduceret echelonform**.
- ➍ Overfør denne sidste matrix til et (ækvivalent) ligningssystem
- ➎ Isolér **bundne** variable  $\rightsquigarrow$  parameterfremstilling med de **frie** variable som parametre

Givet en  $m \times n$ -matrix  $A$  med rækkeækvivalent matrix  $R$  på reduceret række echelonform.

## Definition

- 1 As rang  $\text{rank}(A)$ : Antal Pivotsøjler i  $R$  – og dermed i  $A$ .
- 2 As nullitet (eller defekt)  $\text{nullity}(A)$ : Antal søjler uden Pivot.

## Sumformel

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n.$$

(Variablene er enten bundne eller fri!)