# MAT2 – A&D 14. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

11.5.2009

### Definition

- To $n \times n$-matricer $A, B$ kaldes similære (eng.: similar) hvis der findes en invertibel $n \times n$-matrix $P$ således at $A = PBP^{-1}$.
- En $n \times n$-matrix $A$ kan diagonaliseres hvis den er similær til en diagonalmatrix $D$ (med 0er udenfor diagonalen): $A = PDP^{-1}, D = P^{-1}AP$.

### Theorem

*Similære matricer har det samme karakteristiske polynomium ($\rightsquigarrow$ samme egenværdier, med samme algebraiske multiplicitet).*

### Bevis.

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda I) =$
$\det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = \det P \det(B - \lambda I) \det P^{-1} =$
$\det(B - \lambda I) = p_B(\lambda)$. $\square$

**Theorem**

*En $n \times n$-matrix $A$ kan diagonaliseres hvis og kun hvis der findes en egenvektorbasis for $A$, dvs. en basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for $\mathbf{R}^n$ bestående af egenvektorer.*

## Metode:

1. Bestem $A$s egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – med multiplicitet; de er ikke nødvendigvis alle forskellige.
2. Bestem en egenvektorbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$: $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$
3. $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \ldots \ \mathbf{v}_n]$ $\leftarrow$ basisegenvektorer som søjler
4. $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ $\leftarrow$ egenværdier på diagonalen. Samme rækkefølge!

**Theorem**

*Givet en $n \times n$-matrix $A$ med $n$ forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.*

- *Tilhørende egenvektorer – $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ – danner en egenvektorbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.*
- *$A$ kan diagonaliseres.*

- En $2 \times 2$ rotationsmatrix har ingen egenværdier/vektorer (med mindre drejningsvinklen er 0 eller $\pi$).
- En $3 \times 3$ rotationsmatrix har alle vektorer på aksen som egenvektorer (egenværdi 1) ikke andre (med mindre drejningsvinklen er 0 eller $\pi$).