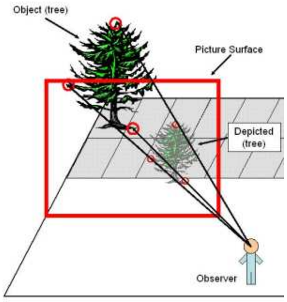
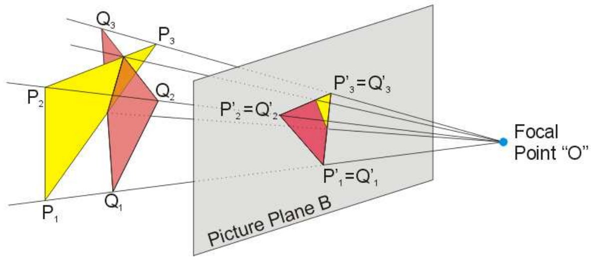
E-opgave 3

En perspektivprojektion kan beskrives som en sammensætning af en translation, en rotation og en centralprojektion.
Hverken translation eller centralprojektion er lineære afbildninger.
Man kan alligevel drage nytte af lineær algebra – ved homogene koordinater.





Vi betragter en perspektivprojektion med øjepunkt $E : (x_e, y_e, z_e) = (2, 0, -2)$ og midtpunkt $C : (x_c, y_c, z_c) = (5, 4, 10)$.

1. Bestem en translation og en rotation[1] hvis sammensætning overfører øjepunktet i Origo $O : (0, 0, 0)$ og midtpunktet i et punkt på Y-aksen. Beskriv denne sammensatte afbildning i homogene koordinater ved en 4×4-matrix.

Centralprojektionen

$$C : \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 |\ y > 0\} \to \mathbf{R}^2$$

fra Origo er givet ved

$$C([x, y, z]) = [\frac{x}{y}, \frac{z}{y}].$$

Bemærk at punktet $S : (\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y})$ svarer til sporet (=snitpunktet) af linien gennem Origo og (x, y, z) med den lodrette projektionsplan givet ved $y = 1$.

Hvordan afbilder en centralprojektion rette linier? Halvlinien l gennem sporpunktet $S : (a, 1, b)$ med retningsvektor $[x, y, z]$ beskrives ved parameterfremstillingen

$$l : \mathbf{x}(t) = \overrightarrow{OP_t} = [a, 1, b] + t[x, y, z],\ t \geq 0.$$

2. Bestem parameterfremstillingen $C(\mathbf{x}(t))$ for billedet af linien l under centralprojektionen C. Check at man kan omskrive den til

$$C(\mathbf{x}(t)) = [a, b] + \frac{ty}{1 + ty}([\frac{x}{y}, \frac{z}{y}] - [a, b]).$$

3. Gør rede for at halvlinien l under centralprojektionen afbildes i det rette liniestykke mellem (a, b) og forsvindingspunktet $V_l : (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$ i projektionsplanen.[2]

4. Gør rede for at forsvindingspunktet $V_l := \lim_{t \to \infty} C(\mathbf{x}(t))$ faktisk har koordinater $V_l : (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$;
og konkluder at parallele linier har det samme forsvindingspunkt.

[1] En drejning om Z-aksen efterfulgt af en drejning om X-aksen

[2] Derfor tegner man billedet af et liniestykke mellem to punkter i rummet bare som liniestykket mellem deres billeder i planen.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G | 9940 8855 | RAUSSEN@MATH.AAU.DK
9220 AALBORG ØST | - HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN