E-opgave 4

Man kan bruge determinanter til at bestemme arealer af parallelogrammer og rumfang af et parallelepipedum. Og hvis man skærer sådanne op, så også af trekanter, prismer, pyramider...

Standardmatricer for spejlinger (se 3.) og drejninger (se 4.) i rummet ser ret komplicerede ud. Men der findes meget simplere matricer som er similære til dem og hvis geometriske betydning er umiddelbart til at forstå – egenværdier og egenvektorer på arbejde!

1. Betragt huset (uden skorsten) fra websiden. Det har hjørnepunkter i $[0,0,0]$, $[7,0,0]$, $[0,9,0]$, $[0,0,3]$, $[7,9,0]$, $[7,0,3]$, $[0,9,3]$, $[7,9,3]$, $[3.5,0,5]$ og $[3.5,9,5]$. Beregn husets rumfang ved hjælp af determinanter.

2. Under den "militære projektion" (se E-opgave 1) givet ved
$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} cx - sy \\ sx + cy + z \end{bmatrix}$$
afbildes den blå del af taget (med hjørnepunkter i $[7,0,3]$, $[7,9,3]$, $[3.5,0,5]$ og $[3.5,9,5]$) i et plant parallelogram. Beregn arealet af dette parallelogram i tegneplanen ved hjælp af en determinant.

3. Givet en enhedsvektor $\mathbf{a} = [a,b,c]$ i $\mathbf{R}^3$. Fra E-opgave 2 vides at standardmatricen for en spejling i planen $p_\mathbf{a}$ givet ved ligningen $ax + by + cz = 0$ er bestemt ved
$$C_\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{bmatrix}.$$
Find egenværdierne og en egenvektorbasis for matricen $C_\mathbf{a}$, helst ved geometriske argumenter. Find herefter en diagonalmatrix D og en regulær matrix P således at
$$C_\mathbf{a} = PDP^{-1}.$$

4. Lad igen $\mathbf{a} = [a,b,c] \in \mathbf{R}^3$ være en enhedsvektor. Betragt matricen
$$R = \begin{bmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{bmatrix}.$$
Gør rede for, at vektoren $\mathbf{a}$ er en egenvektor til denne matrix med tilhørende egenværdi 1.
Det oplyses, at matricen R har
$$\begin{aligned} \det(R - \lambda I) &= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$
som sit karakteristiske polynomium. Gør rede for at matricen R ikke har andre reelle egenværdier.

5. Antag nu, at $\mathbf{a} \neq \pm[1,0,0]$.
For $\mathbf{u} = [0,c,-b]$ og $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{u} = [a^2-1, ab, ac]$ kan man regne efter, at $R\mathbf{u} = \mathbf{v}$ og at $R\mathbf{v} = -\mathbf{u}$.
Nu betragtes matricen $P = [\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$ – med de nævnte vektorer som søjlevektorer. Det oplyses at P er invertibel. Bestem og interpreter matricen $P^{-1}RP$ – helst uden at udføre matrixmultiplikationer.
Gør rede for, at den rumlige lineære afbildning $\mathbf{x} \mapsto R\mathbf{x}$ drejer enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ en ret vinkel om aksen gennem Origo med retningsvektor $\mathbf{a}$.