Facit til E-opgaverne i udvalg

E-opgave 1

2. $F(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}, F(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix}, F(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   Vinkler: mellem $F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2) : \frac{\pi}{2}$, mellem $F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_3) : \frac{\pi}{2} - \theta$; mellem $F(\mathbf{e}_3), F(\mathbf{e}_2) : \theta$.

3. $F(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + tA\mathbf{v}$

4. $R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ z \end{bmatrix}$.
   $P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + z \end{bmatrix}$. Dybde og højde lægges sammen.

5. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca + sb \\ -sa + cb \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -s \\ -c \\ 1 \end{bmatrix}$. Alle linier har samme retningsvektor.

E-opgave 2

1. B_φs søjler er givet ved $S_\varphi(\mathbf{e}_i)$. $S_\varphi(\mathbf{e}_2) = -\widehat{S_\varphi(\mathbf{e}_1)}$.

2. $B_\psi B_\varphi = \begin{bmatrix} \cos 2\psi \cos 2\varphi + \sin 2\psi \sin 2\varphi & \cos 2\psi \sin 2\varphi - \sin 2\psi \cos 2\varphi \\ \sin 2\psi \cos 2\varphi - \cos 2\psi \sin 2\varphi & \sin 2\psi \sin 2\varphi + \cos 2\psi \cos 2\varphi \end{bmatrix} =$
   $= \begin{bmatrix} \cos 2(\psi - \varphi) & -\sin 2(\psi - \varphi) \\ \sin 2(\psi - \varphi) & \cos 2(\psi - \varphi) \end{bmatrix}$.
   Denne matrix svarer til den lineære afbildning som fås ved en drejning om Origo med vinklen $2(\psi - \varphi)$.

3. Ved projektion på planen $p_\mathbf{a}$ ses:
   Enhver vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ kan skrives som $\mathbf{y} = \mathbf{x} + c\mathbf{a}$ med $\mathbf{x} \in p_\mathbf{a}$ og $c \in \mathbf{R}$.
   Derfor: $C_\mathbf{a}\mathbf{y} = \mathbf{x} - c\mathbf{a}$: spejling i $p_\mathbf{a}$!

4. $M = B_\varphi A C_\mathbf{a}$.

E-opgave 3

1. Translation med vektor $[-2, 0, 2]$.
   Drejningsmatrix: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   Sammensætning i homogene koordinater: $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{14}{5} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} & \frac{-22}{13} \\ -\frac{36}{65} & -\frac{48}{65} & \frac{5}{13} & \frac{-74}{65} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $C(\mathbf{x}(t)) = [\frac{a+tx}{1+ty}, \frac{b+tz}{1+ty}] = [a, b] + \frac{ty}{1+ty}[\frac{x}{y} - a, \frac{z}{y} - b]$.
3. Idet $0 \leq \frac{ty}{1+ty} < 1$ peger $C(\mathbf{x}(t))$ på et punkt på liniestykket mellem $S : (a, b)$ og $V_l : (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$.
4. $\lim_{t\to\infty} \frac{ty}{1+ty} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} C(\mathbf{x}(t)) = [\frac{x}{y}, \frac{z}{y}]$ – uafhængig af sporet (begyndelsesvektor) $[a, 1, b]$!

E-opgave 4

1. 252.
2. $31.5 - 18s$.
3. $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   For $\mathbf{a} \neq \pm\mathbf{e}_2, \pm\mathbf{e}_3$ f.eks. $P = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & -c \\ c & 0 & b \end{bmatrix}$.

   2den og 3die søjlevektor skal være lineært uafhængige og vinkelrette på **a**.
4. R har kun 1 som reel egenværdi.
5. $P^{-1}RP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ beskriver en drejning om X-aksen, drejningsvinklen er ret.