Repetition, og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 3.
Rækkeoperationer, rækkeækvivalens, matricer på (reduceret) echelonform. (In)konsistens.

Forelæsning, 1. del

Mål og indhold:

Nu skal vi sætte løsning af lineære ligningssystemer vha. rækkeoperationer helt i system.
Gauss-algoritme: Det gøres ved den såkaldte rækkereduktionsalgoritme (eller Gauss-algoritme). Ved at arbejde sig systematisk gennem søjlerne fra venstre til højre opnår man

- ved rækkeombytninger: at ledende koefficienter optræder længst muligt til venstre;
- og ved rækkeadditioner(“erstatninger”): at der kun står 0-taller under en ledende koefficient i hver Pivotsøjle.

Efter et antal operationer ender man med en (rækkeækvivalent) matrix på echelonform. Søjler med Pivotpositioner kaldes Pivotsøjler; de tilsvarende variable er bundne[1]; evt. resterende variable er frie[2] variable.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ved baglæns substitution[3] kan man fra en sådan matrix på echelonfrom hurtigt finde frem til en parameterfremstilling for løsningsmængden (”the general solution”) for ligningssystemet som udtrykker de bundne variable vha. de frie variable.
Gauss-Jordan algoritme: Det kan som regel betale sig at fortsætte med flere rækkeoperationer for at nå frem til en matrix på reduceret echelonform (som iøvrigt er entydigt bestemt ud fra den oprindelige matrix). Det opnås med den såkaldte Gauss-Jordan algoritme. Her sørger man – ved rækkemultiplikationer – for at alle Pivotelementer normeres til 1-taller og – ved rækkeadditioner – at der kun står 0-taller også over disse Pivotpositioner.

Litteratur:

Lay, 1.2, pp. 30 – 36.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

Lay, 1.2, p. 41 – 43: 1, 3, 9, 11, 17, 21[4], 22[5], 23, 24[6].

[1] på engelsk: basic
[2] eng.: free
[3] eng.: back substitution
[4] Facit: FFTTF
[5] Facit: FFTTT
[6] Facit: No!

Forelæsning, 2. del

kl. 11:25 – 12 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Fra echelonmatrix til løsningsmængde:
Konsistens – er der overhovedet en løsning? Hvis man bare er interesseret i at afgøre om et system er konsistent kan man nøjes med at reducere totalmatricen til echelonform: Systemet er konsistent med mindre echelonmatricen har en række på form $[00\cdots 0|c]$ med $c \neq 0$ – hvilken ligning står denne række for?. Hvis der ikke findes en sådan række, dvs. , hvis den sidste søjle i totalmatricen ikke er en Pivotsøjle, så kan man bruge baglæns substitution (eller Gauss-Jordan metoden) til at finde en parameterfremstilling for løsningsmængden – og dermed udtrykke de bundne variable vha. de frie variable.
Entydig løsning? Hvornår findes der en entydig løsning? Kravet er, at systemet er konsistent og at der ikke findes frie variable (eller at alle variable er bundne). Det kan kun lade sig gøre hvis der er lige så mange ligninger som der er variable.
Parameterfremstilling for løsningsmængden: Hvordan ser løsningsmængden ud for et konsistent system når der findes mindst en fri variabel? Det er allerede klart, at der så er uendelig mange løsninger, da de frie variable kan antage vilkårlige reelle værdier. Med andre ord: Et lineært ligningssystem kan umuligt have præcist to eller præcist 17 eller præcist 2010 løsninger!

Hvis man isolerer de bundne variable i det ligningssystem som svarer til en reduceret echelonmatrix, får man hurtigt en parameterfremstilling for løsningsmængden med de fri variable som parametre!

Litteratur:

Lay, 1.2 – 1.3, pp. 36 – 40.

Software:

Denne webside demonstrerer Gauss-Jordan algoritmen som overfører en matrix til en rækkeækvivalent reduceret echelon matrix.

Næste gang:

Onsdag, den 10.2., kl. 8:15 – 12:00.
Linearkombinationer af vektorer. Spænd af vektorer. Matrixligninger og deres løsning(er).
Lay, 1.3 – 1.4, pp. 44 – 53, 56 – 62.