Repetition og perspektivering

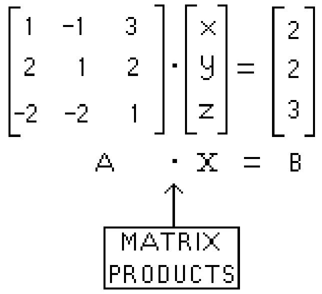
kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 3.
Linearkombinationer og spænd.
Matrix gange vektor.
Vektorligninger. Matrixligninger.

1. forelæsning

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Først skal vi bringe mere systematik i beskrivelsen af løsningsmængden for et lineært ligningssystem (eller en tilsvarende matrixligning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$):



Homogene lineære ligningssystemer:
Det er nemmest at behandle homogene lignigssystemer – svarende til en matrixligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ – først. De er karakteriseret ved at højresiden i alle ligninger er 0. Et homogent ligningssystem har altid mindst en løsning, den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (eller alle $x_i = 0$; ses umiddelbart ved indsætning). Derudover er der ikke-trivielle løsninger hvis og kun hvis der findes mindst en fri variabel. Helt generelt gælder:
Enhver linearkombination af løsninger er igen en løsning.
Inhomogene lineære ligningssystemer:
Et inhomogent løsningssystem har ikke altid en løsning; det kan jo godt være inkonsistent. Men *hvis* systemet er konsistent, så får man lys over løsningsmængdens struktur ved at sammenligne med det tilsvarende homogene system – hvor man bare sætter alle højresider til 0. Så ses umiddelbart ved indsætning:

1. Hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, så gælder: $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{b}$ (summen af en løsning til det homogene og en løsning til det inhomogene system løser ligeledes det inhomogene system).

2. Hvis $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ og $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$, så gælder: $A(\mathbf{y}-\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. (Differencen mellem to løsninger af det inhomogene system løser det homogene system).

Løsningsmængder L_H og L_I:
Disse to simple facts giver anledning til følgende opskrift[1]:
Hvis man kender løsningsmængden L_H af det homogene system og bare én (såkaldt partikulær) løsning $\mathbf{y}_p$ af det homogene system, så gælder for løsningsmængden L_I af det inhomogene system:

$$L_I = \mathbf{y}_p + L_H = \{\mathbf{y}_p + \mathbf{x} \mid x \in L_H\}.$$

Resultatet har en umiddelbar geometrisk interpretation, hvis systemet tillader en eller to frie variable. I så fald svarer løsningsmængderne til en linie, hhv. en plan. I det homogene tilfælde går linien/planen gennem Origo; løsningsmængden til det inhomogene system findes herfra gennem en parallelforskydning af denne linie eller plan.

[1] Kan I huske disse sammenhæng fra teorien om lineære differentialligninger? Sammenhængen mellem løsningsmængderne til homogen/inhomogen ligning er helt analogt!

FREDRIK BAJERSVEJ 7G — 9940 8855 — RAUSSEN@MATH.AAU.DK
9220 AALBORG ØST — HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Mål og indhold:

Opgaver:

Lay, 1.3, pp. 37 – 39 11, 17, 23[2], 25[3], 31[4].

en lille geometrisk gåde Find et eksempel på tre planer i rummet således at

- de ikke er parallele med hinanden to og to og
- de ikke skærer hinanden i et fælles punkt

Planerne kan fx. beskrives hver især ved en lineær ligning.

Lay, 1.4, pp. 47 – 49 3, 13, 17[5], 19, 23[6].

2. forelæsning

kl. 11:25 – 12 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Nu kommer vi til det vigtigste teoretiske begreb i hele kurset:
Lineær (u)afhængighed af en mængde vektorer. En definition, som kræver tilvænning!
En mængde vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ kaldes lineært afhængig, hvis vektorligningen (afhængighedsrelationen)

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

har andre løsninger end den trivielle løsning $x_1 = \cdots = x_p = 0$ – og lineært uafhængig ellers.
En lineært afhængig mængde af vektorer har den egenskab at (mindst) en af vektorerne kan udtrykkes som linearkombination af de andre. Denne vektor kan derfor udelades, hvis man vil udtrykke spændet af vektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ så økonomisk som muligt.

Hvornår er op til tre vektorer lineært uafhængige?
Én vektor $\mathbf{v}$ er lineært afhængig, hvis den er lig med $\mathbf{0}$-vektoren - ellers er den lineær uafhængig og udspænder en linie.
To vektorer er lineært afhængige hvis de er parallele. I så fald udspænder de kun en linie – eller nulrummet; hvis de er lineært uafhængige, så udspænder de en plan.
Tre vektorer i rummet udspænder hele rummet hvis og kun hvis de er lineært uafhængige; er de lineært afhængige, udspænder de noget mindre: en plan, en linie eller bare nulrummet.

Generelt er et antal vektorer lineært uafhænginge, hvis enhver vektorer i deres spænd er en entydig linearkobination af disse vektorer; hver vektor har kun en adresse i det lineære postvæsen!

Metode: Hvordan finder man ud af om en mængde vektorer er lineært uafhængig? Man indsætter vektorerne som søjler i en matrix A. Vektorerne er lineært uafhængige hvis hver søjle i denne matrix A er en Pivotsøjle – for så har matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

[2]Facit: FFTTF
[3]Der er forskel mellem mængden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ og spændet Span$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$!
[4]se teksten nederst i første spalte
[5]Matricen A står i teksten over opgaven; en løsning kræver rækkereduktion!
[6]Facit: FTFTTT

Litteratur:

Lay 1.5, pp. 50 - 54; 1.7, pp. 65 – 70.

Wikipedia Linear independence

Næste gang:

Mandag, den 22.3., kl. 8:15 – 12:00.
Lineære afbildninger og deres standardmatricer.
Lay, 1.8 – 1.9, pp. 73 – 84.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
- HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN