

Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 3.

Invertible matricer. Løsning af matrixligninger vha. invers matrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - 4R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

1. forelæsning

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Matrixinversion: Hvordan beregnes den inverse matrix til et produkt af to invertible matricer? til den transponerede af en invertibel matrix? Se Theorem 6 og overvej hvorfor man skal bytte om på rækkefølgen i b.

Der findes en simpel opskrift som tillader på samme tid at afgøre om en given $(n \times n)$ -matrix A er invertibel og i givet fald at **finde den inverse matrix** (den er dog kun praktikabel for et menneske hvis n er af moderat størrelse):

Man danner den udvidede $n \times 2n$ -matrix $[A|I_n]$ - med den n -dimensionelle enhedsmatrix I_n på højresiden og gennemfører rækkeoperationer på denne nye større matrix. Matricen A er invertibel hvis og kun hvis denne matrix er rækkeækvivalent til en matrix på formen $[I_n|C]$ - altså skal A have Pivotelementer i hver søjle og dermed hver række - og i så fald finder man den inverse matrix på højresiden:

$$A^{-1} = C.$$

¹F-F-T-T-F

²Produkterne står for multiplikation af matricer med kun en række, hhv. søjle.

³T-F-F-T-T

⁴corresponding $n \times n$ -matrix: 1-taller på og under diagonalen, 0-taller over

For de nysgerrige:

I definitionen for den inverse matrix C til en matrix A kræves der: $AC = CA = I$. Man kan faktisk nøjes med kun at kræve en af delene, og den anden gælder automatisk. Hvorfor? Se følgende supplement på nettet; det kræver blot at man har styr på injektive og surjektive lineære afbildninger.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

Lay, 2.1, pp. 116 – 118 ¹⁵, ²⁷.

Lay, 2.2, pp. 126 – 128 1, 5, ⁹³, 31, ³³⁴.

2. forelæsning

kl. 11:25 – 12 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Vi giver to **begrundelser** for gyldigheden af opskriften for inversion af matricer:

- Ligningen $AC = I$ kan opfattes som en samling af n matrixligninger med ubekendte søjlevektorer \mathbf{c}_i :
 $A\mathbf{c}_i = \mathbf{e}_i$ med $C = [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n]$ og

$I_n = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]$. Disse n ligninger løses **simultant** ved ovenstående opskrift.

2. En rækkeoperation kan opfattes som multiplikation med en **elementær** matrix (Lay, p. 122). A er derfor invertibel hvis og kun hvis der findes elementære matricer E_1, \dots, E_k således at $E_k \cdots E_1 A = I_n$. I så fald gælder: $A^{-1} = E_k \cdots E_1 = E_k \cdots E_1 I_n$, dvs. man kommer frem til A^{-1} ved at bruge de samme rækkeoperationer på I_n som dem der bruges for at nå fra A til I_n .

Der findes mange forskellige **kriterier** til at beskrive/afgøre om en given kvadratisk matrix er invertibel; de er sammenfattet i Theorem 8 på side 145.

Endelig kan invertibilitet også defineres for lineære afbildninger. Det er ikke

særlig overraskende at en lineær afbildning er invertibel hvis og kun hvis dens standard matrix præsentation er invertibel.

Litteratur:

Lay, 2.2 – 2.3, pp. 137 – 147.

Software:

- Matrix Inverse
- Matrix Calculator Applet
- Find the Inverse Matrix

Næste gang:

Tirsdag, den 6.4., kl. 8:15 – 12:00 i auditorium 4.

E-opgave 2 og 3. Til E-opgave 3 har vi brug for **homogene koordinater**, som forklares i lærebogens afsnit 2.7, pp. 175 – 180.