Repetition og perspektivering

kl. 8:15 – 8:40 i Auditorium 3.
Underrum. Basis for et underrum.
Koordinater med hensyn til en basis.

1. forelæsning

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Dimension: Til et underrum kan man vælge mange forskellige baser, men de har allesammen noget til fælles: Antallet af vektorer i en basis er altid det samme! Dette (an)tal kaldes underrummets dimension og måler i en hvis forstand underrummets størrelse. Dimensionen har en geometrisk betydning: Et underrum af dimension 1 bestemmer en linie, et underrum af dimension 2 bestemmer en plan osv.

Rang: Specielt kaldes dimensionen af søjlerummet for en matrix A for matricens rang. For en matrix med n søjler er dette tal og dimensionen for matricens nulrum forbundet med hinanden ved rangsætningen:

$$\text{rang } A + \dim \text{ Nul } A = n :$$

Betragtes matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så er rangen nemlig givet ved antallet af bundne variable og dimensionen af nulrummet ved antallet af frie variable – og summen af disse to tal giver antallet af alle variable.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

Lay, 2.8, pp. 189 – 191 21[1], 25, 33.

Lay, 2.9, pp. 196 – 198 1, 5, 9, 17[2], 25.

2. forelæsning

kl. 11:25 – 12:00 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Determinanter: Oprindeligt en metode til at bestemme arealet af et parallelogram med givne sider og rumfang af en skæv kasse (parallelepipedum). Determinanten af en kvadratisk[3] matrix bestemmes rekursivt[4]:
Til at begynde med, kender man determinanten af 1×1 og af 2×2-matricer. Generelt definerer man determinanten af en $n \times n$-matrix som en alternerende[5] sum af udtryk som benytter sig af underdeterminanter svarende til $(n-1) \times (n-1)$-matricer. Der er forskellige kofaktor[6] udviklinger af en sådan determinant som alle giver det samme resultat: Man kan vælge en række eller også en søjle og udvikle efter den. I praksis er det nemmest at bruge udvikling efter en række eller søjle med mange 0-koefficienter. Definitionen bruges mest til udledning af determinantens egenskaber.

[1] F-T-F-T-T
[2] T-F-T-T-T
[3] Determinanter giver kun mening for kvadratiske matricer!
[4] først for 2×2, så for 3×3, osv.
[5] skiftende fortegn!
[6] eller komplement

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
-
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \cdots\, a_{1n}c_{1n}$$

where C_{1i} is the ith cofactor.

Beregningsmetode: For større matricer er det ikke særlig praktikabelt at benytte definitionen til beregning af determinanter; det tager simpelthen for mange regneskridt. I stedet benyttes (igen, igen) rækkeoperationer: Først finder man ud af om og hvor meget determinanten af en matrix ændrer sig under en elementær rækkeoperation (Theorem 3, s. 289). Metoden går ud på at overføre en matrix til echelonform uden brug af matrixmultiplikationer. Determinanten af en $n \times n$-matrix bliver så produktet af de resulterende Pivotelementer (med fortegn), hvis der er n af dem – og determinanten er 0, hvis der mangler Pivotelementer.

Konsekvens: (Theorem 4): En kvadratisk matrix A er invertibel hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

Litteratur:

Lay ch. 2.9, pp. 193 – 195.
Lay, ch. 3.1 – 3.2, pp. 202 – 211.

Wikipedia Determinant

Demos på nettet:

- Determinants of Small Matrices
- Determinants as a linear combination of determinants of smaller matrices
- Computing determinants using row operations

Næste gang:

Mandag, den 3.5., kl. 8:15 – 12.
Flere egenskaber af determinanter.
Egenvektorer og egenværdier.
Lay, 3.2, pp. 212 – 214.
Lay, 5.1 – 5.2, pp. 318 – 330.

Teorispørgsmål:

En liste med 8 spørgsmål findes nu på denne side. Ret til mindre justeringer forbeholdes.