Repetition og perspektivering

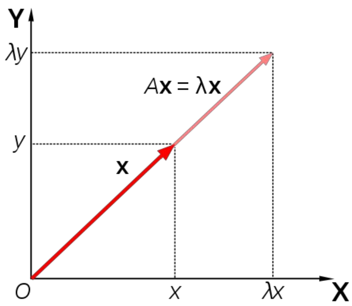
kl. 8:15 – 8:40 i Auditorium 3.
Determinanters egenskaber.
Egenvektorer og egenværdier:
Definition og beregning.

1. forelæsning

kl. 8:45 – 9:25 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Det er nemt at forstå hvad en $n \times n$ matrix A (eller en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$) gør med en egenvektor $\mathbf{x}$: Den bliver sendt på en (kortere eller længere) vektor $A\mathbf{x}$ på den samme linie.



Derfor bliver en linearkombination af egenvektorer igen sendt på en (som regel en anden) linearkombination af de samme egenvektorer. Man har dermed fuldstændig styr på afbildningen givet ved multiplikation med matricen, hvis der findes en basis bestående af egenvektorer for $\mathbf{R}^n$.

Det gør der ikke altid. F.eks. har en drejning i planen $\mathbf{R}^2$ slet ingen egenvektorer! Men i en række tilfælde kan man være sikker på at der findes sådan en egenvektorbasis.

Theorem 2 (p. 307): En mængde af egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er lineært uafhængig.

Konsekvens: Hvis en $n \times n$ matrix A har n forskellige egenværdier, så findes der en egenvektorbasis for A – og dermed er A diagonaliserbar.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:25 grupperummene.

Opgaver:

Lay, 5.1, pp. 324 – 326 5, 13, 21[1], 29[2]

Lay, 5.2, pp. 333 - 335 5, 13, 21[3]

Lay, 3.2, pp. 215 – 216 21, 27[4], 31, 39.

2. forelæsning

kl. 11:25 – 12:00 i Auditorium 3.

Mål og indhold:

Similaritet: Mere generelt sammenligner man $n \times n$-matricer med begrebet similaritet. Matricer A og B er similære hvis der findes en invertibel matrix P således at $A = PBP^{-1}$. Similære matricer har det samme karakteristiske polynomium og dermed de samme egenværdier, endda med samme algebraisk multiplicitet.

Specielt er en matrix diagonaliserbar hvis den er similær til en diagonalmatrix. Og dette er tilfældet, hvis og kun hvis matricen har en basis bestående af egenvektorer. Givet en egenvektorbasis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$,

[1] F-T-T-T-F
[2] Find en vektor $\mathbf{v}$, således at $A\mathbf{v} = s\mathbf{v}$.
[3] F-F-T-F
[4] T-F-T-F

så dannes matricen $P = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ med disse egenvektorer som søjler. Man regner efter at $A = PDP^{-1}$, hvor D er diagonalmatricen med d_{ii} lig med egenværdien hørende til $\mathbf{v}_i$.

Hvordan afgør man om en matrix A er diagonaliserbar? Først skal alle rødder i det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda I)$ være reelle. Derudover skal der til enhver egenværdi (=rod) λ for A med algebraisk multiplicitet k qsvare et egenrum E_λ med samme dimension k! (Theorem 7, p. 324). Generelt kan denne dimension (egenværdiens geometriske multiplicitet) risikere at være mindre.

Litteratur:

Lay ch. 5.1, p. 307, ch. 5.2 – 5.3, pp. 314 – 323.

Wikipedia Eigenvalue, eigenvector and eigenspace

Wikipedia Characteristic polynomial

Wikipedia Similar matrix

Applet på nettet

- Egenvektorer og egenværdier for 2×2-matricer

Næste gang:

Mandag, den 17.5., kl. 8:15 – 12:00.
E-opgave 4.