MAT2 – A&D 3. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

10.2.2010

Regneregler for vektorer

$+$ kommutativ: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

$+$ associativ: $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

neutralt element: $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$

invers element: $\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}=\mathbf{0}$

mult. associativ: $(cd)\mathbf{u}=c(d\mathbf{u})$

1 neutral: $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

distributivitet 1: $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$

distributivitet 2: $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$

Linearkombinationer. Spænd

Givet et antal vektorer $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
En vektor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_p\mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n,\; c_i \in \mathbf{R}$, kaldes en linearkombination af vektorerne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \in \mathbf{R}^n$.
Vektorernes spænd er mængden af alle deres linearkombinationer:

$$Span\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} := \{c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_p\mathbf{a}_p |\; c_i \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n.$$

Eksempler:

1. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow Span\{\mathbf{a}\} = \{c\mathbf{a}|\; c \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$
   vektorer på en linie gennem Origo med retning $\mathbf{a}$.
2. $Span\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2|\; c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$
   vektorer i en plan med retningsvektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$
   – med mindre $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ligger på én linie.

Bemærk: en hel plan, ikke bare en oktant!

Matrix gange vektor

A en $m \times n$-matriks, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \rightsquigarrow A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$.

$$A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

er linearkombinationen af As søjlevektorer $\mathbf{a}_i$ med vægte x_i.

Den i-te indgang (koefficient) i vektoren $A\mathbf{x}$:

$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n =$

prikprodukt $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ \cdots \\ a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ mellem As i-te rækkevektor og $\mathbf{x}$.

Linearitets-egenskaber:

1. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
2. $A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$

Spænd. Vektor -og matrixligninger. Ligningssystemer

Spænd $\mathbf{b} \in Span\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} \Leftrightarrow$

Vektorligningen $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$ har en løsning $x_1, \ldots, x_p \Leftrightarrow$

Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsningsvektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^p \Leftrightarrow$ (A er matricen med søjlevektorer $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$)

Ligningssystemet med udvidet matriks $[A|\ \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_p|\ \mathbf{b}]$ er konsistent.

Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

En løsning $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ til matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med matrix $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$ svarer til

- en løsning af vektorligningen $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$
- en løsning af det lineære ligningssystem med totalmatrix $[A \mid \mathbf{b}]$.

Matrixligningen har en løsning for alle vektorer $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ hvis og kun hvis

- Ligningssystemet med totalmatrix $[A \mid \mathbf{b}]$ har en løsning for alle $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$
- der efter en rækkereduktion af koefficientmatricen A findes Pivoter i hver række.