MAT2 – A&D 4. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

15.2.2010

Homogene og inhomogene ligningssystemer

homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har altid den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

inhomogen $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ konsistent?

For et homogent ligningssystem gælder: Enhver linearkombination af løsninger er en løsning:

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{y} = \mathbf{0}, c, d \in \mathbf{R} \Rightarrow A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Sammenligning af løsningsmængderne L_H og L_I:

1. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{y} = \mathbf{b} \Rightarrow A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{b}$
2. $A\mathbf{y} = \mathbf{b}, A\mathbf{z} = \mathbf{b} \Rightarrow A(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \mathbf{0}$

Theorem

Hvis $\mathbf{y}_p \in L_I$ er en vilkårlig (partikulær) løsning af det inhomogene system, så gælder følgende sammenhæng mellem løsningsmængderne:

$L_I = \mathbf{y}_p + L_H = \{\mathbf{y}_p + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in L_H\}$ *en "parallelforskydning".*

Lineær (u)afhægnighed

Definition

- En ligning $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ med reelle tal x_i kaldes en afhængighedsrelation mellem vektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ i $\mathbf{R}^n$.
- En mængde vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ kaldes lineært afhænging hvis der findes en ikke-triviel afhængighedsrelation mellem dem, dvs. en hvor ikke alle x_i er lig med 0.
- Mængden kaldes lineært uafhængig hvis den eneste afhængighedsrelation mellem dem er givet ved den trivielle relation $x_1 = \cdots = x_p = 0$.
- Betydning: Lineært afhængige vektorer udspænder mindre end deres antal "berettiger til".
  Ikke-trivelle afhængighedsrelationer fører til "spild".
- Spændet af lineært uafhængige vektorer er maksimalt stort i forhold til antal af vektorerne.

Lineær (u)afhægnighed

En opskrift

Hvordan afgør man om en mængde $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ af vektorer i $\mathbf{R}^n$ er lineært afhængig eller uafhængig?

1. Dan matricen $A = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p]$ med vektorerne som søjlevektorer.
2. Rækkereduktion til echelonform.
3. Hvis alle søjler er Pivotsøjler, så er vektorererne lineært uafhængige – ellers lineært afhængige.

Hvorfor?

$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med $\mathbf{x}^T = [x_1, \cdots, x_p]$.
En ikke-triviel afhængighedsrelation svarer altså til en ikke-triviel løsning af ligningssystemet givet ved matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Lineær uafhængighed
Nogle kriterier

- Hvis **0**-vektoren er indeholdt i en mængde vektorer, så er denne mængde altid lineært afhængig.
- En mængde af p vektorer i $\mathbf{R}^n$ er altid lineært afhængig såfremt $p > n$ – flere vektorer end dimensionen.
- En mængde af vektorer i $\mathbf{R}^n$ er lineært afhængig hvis og kun hvis en af vektorerne er linearkombination af de andre.
- Med andre ord: En mængde af vektorer i $\mathbf{R}^n$ er lineært afhængig hvis og kun hvis man kan fjerne en eller flere vektorer uden at spændet bliver mindre.
- Den er lineær uafhængig hvis fjernelse af en af vektorerne altid fører til et mindre spænd.