MAT2 – A&D 11. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

12.4.2010

Definition

En delmængde $H \subset \mathbf{R}^n$ kaldes et underrum ($H \leq \mathbf{R}^n$) hvis der gælder:

- $\mathbf{0} \in H$[a];
- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$;
- $\mathbf{u} \in H, c \in \mathbf{R} \Rightarrow c\mathbf{u} \in H$.

[a] sikrer at $H \neq \emptyset$

Konsekvens og interpretation:
Enhver linearkombination $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ af vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in H$ er selv indeholdt i H.
Typiske eksempler: Linier og planer gennem Origo

A en $m \times n$-matrix svarende til en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Col $A \leq \mathbf{R}^m$ — As søjlerum udspændt af As søjler $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$:
Col $A = Span\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$.
Det indeholder alle elementer i billedmængden $T(\mathbf{R}^n) \leq \mathbf{R}^m$.

Nul $A \leq \mathbf{R}^n$ — As nulrum Nul $A := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.
Det består af alle løsninger af det homogene ligningssystem givet ved $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Basis for et underrum H

Definition

En delmængde $\mathcal{B} \subset H$ af et underrum H kaldes basis for H hvis
$\mathcal{B}$ udspænder H: $Span\mathcal{B} = H$ og
$\mathcal{B}$ er lineært uafhængig.

Konsekvens og interpretation:

- En basis er en minimal udspændende delmængde (mest "økonomisk").
- Ethvert element $\mathbf{x} \in H$ har éntydige koordinater $c_1, \ldots, c_p$ med hensyn til en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ for H:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p.$$

Koordinater for $\mathbf{x}$ mht. $\mathcal{B}$: $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [c_1, \ldots, c_p]$
findes ved at løse ligningssystemet $B\mathbf{c} = \mathbf{x}$
hvor B er matricen med søjlevektorer $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$.

Givet $m \times n$-matrix $A = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$.
Overfør A i (reduceret) echelonmatrix $B = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n]$.
Pivotsøjler i B svarer til bundne variable i ligningssystemerne $A\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow B\mathbf{x} = 0$; Pivotfrie søjler til frie variable.

Basis for $Nul(A) = Nul(B)$: Løsningsvektorer svarende til "en fri variabel =1, de andre =0";

Basis for $Col(A)$: Dem af søjlerne $\mathbf{a}_i$ hvor søjlerne $\mathbf{b}_i$ er Pivotsøjler.

Theorem

Alle baser af et givet underrum $H \leq \mathbf{R}^n$ har det samme antal elementer.
Dette antal kaldes for underrummets dimension $\dim H \leq n$.

Eksempler: A en $m \times n$-matrix.

$H = \text{Col } A$ dim(Col A)=rang A: matricens (søjle)rang.
Beregning: Antal Pivotsøjler!

$H = \text{Nul } A$ dim(Nul A)=defekt A.
Beregning: Antal frie variable!

Theorem

Rangsætning: $\quad \textit{rang } A + \dim \textit{ Nul } A = n.$