Aalborg Universitet
Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
Første studieår

Arkitektur og Design
Kurver og Flader i Geometri, Arkitektur og Design

**15. lektion**
21. marts 2011
Martin Raussen

## Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 4.
Optimering og partiel differentiation.

## Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 4.

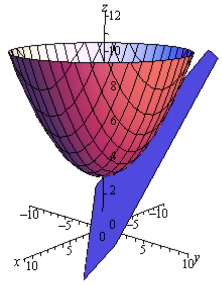
### Mål og indhold:

For en funktion $f$ af en variabel $x$ kan man bruge tangentlinjen gennem et punkt $(a, f(a))$ til at finde $y$ som approksimation til $f(x)$:

$$\Delta f = f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a) = f'(a)\Delta x = df.$$

Her står $\Delta f$ får den faktiske tilvækst i funktionsværdien, mens $df$ står for den differentielle: en god approksimation, når $x$ er tæt på $a$. Kender man altså $f(a)$ og $f'(a)$, så kan man på denne måde beregne en (lineær) tilnærmelse til $f(x)$.

For en funktion $f$ af to variable sammenholder man tilsvarende den eksakte værdi $f(x,y)$ med den $z$-værdi man får i tangentplanen gennem punktet $(a,b)$. Denne tangentplan er givet ved ligningen $z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$. Lige som ovenfor approksimeres $f(x,y)$:
$\Delta f = f(x,y) - f(a,b) \approx f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y = df.$



## Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

### Opgaver:

**Ekstrema på afgrænsede områder** E& P, 12.5., pp. 940 – 942: 23, 25.

**Anvendte optimeringsproblemer** 33[1], 43, 59.

**Differentialer** E& P, 12.6, pp. 949 – 950: 7, 11.

**Approksimation** 21, 23.

## Forelæsningens 2. del:

kl. 11:25 – 12 i Auditorium 4.

### Mål og indhold:

En funktion af to variable kaldes differentiabel i punktet $(a,b)$, hvis denne lineære

[1] 1. oktant: $x, y, z > 0$

Fredrik Bajersvej 7G
9220 Aalborg Øst
9940 8855
raussen@math.aau.dk
people.math.aau.dk/~raussen

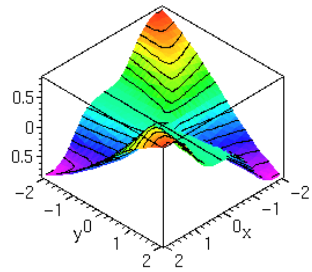
approksimation er "god" i alle punkter i en cirkelskive (eller rektangel) omkring $(a, b)$. Ved hjælp af en grænseværdi kan man formulere præcist hvornår approskimationen er god nok. Man forlanger, at
$0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{|(h,k)|} =$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(f(a+h, b+k) - f(a,b)) - (f_x(a,b)h + f_y(a,b)k)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

**Interpretation:** Approksimationsfejlen $\Delta f - df$ går meget hurtigere mod 0 end afstanden mellem punkterne $(x, y)$ og $(a, b)$ – for alle punkter tæt nok på $(a, b)$. Definitionen kan generaliseres til højere dimensioner vha. gradientvektoren $\nabla f(a)$ – som vi vender tilbage til: se formel (18) i lærebogen.

Det kan være ret vanskeligt at bruge denne definition til at checke om en given funktion faktisk er differentiabel. Heldigvis er mange gængse funktioner differentiable "per automatik":

Hvis de partielle afledede $f_x$ og $f_y$ af fuktionen $f$ er kontinuerte i en cirkelskive eller rektangel, så er funktionen $f$ differentiabel i alle punkter af cirkelskivens (eller rektanglets) indre – og dermed tillader swn en god lineær approksimation. Men det er ikke altid nok, at de partielle afledede bare eksisterer; se nedenfor grafen for en funktion, som har begge partielle afledede 0 i Origo. Hvis den var differentiabel der, så skulle grafen have en vandret tangentplan – men funktionen er ikke differentiabel i Origo.



Sammenhængen mellem begreberne fremgår af den følgende oversigt. For en funktion $f$ af flere variabel gælder:

1. $f$ kontinuert differentiabel (alle 1ste ordens afledede eksisterer og er kontinuerte) $\Rightarrow f$ differentiabel.

2. $f$ differentiabel $\Rightarrow f$ har partielle afledede (de er ikke altid kontinuerte).

3. $f$ differentiabel $\Rightarrow f$ kontinuert.

**Litteratur:**

**E& P** 12.6, pp. 942 – 948.

**Wikipedia** Linear approximation

**Wikipedia** Differentiability in higher dimensions

**Illustrationer på nettet:**

- Tangent Planes and Linear Approximation in 2 Variables

## Næste gang:

Torsdag, 24.3.2011, 8:15–12:00.
Miniprojekt 3.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN