Kurver og flader i geometri, arkitektur og design
6. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

21. februar 2011

Opgave: Find 3.grads polynomium

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ sål. at

$$
\begin{aligned}
y_b = p(0) = &\; a_0 \\
y_s = p(1) = &\; a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\
h_b = p'(0) = &\; a_1 \\
h_s = p'(1) = &\; a_1 + 2a_2 + 3a_3
\end{aligned}
$$

fører til et lineært ligningssystem med løsning:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= p(0) \\
a_1 &= p'(0) \\
a_2 &= -3p(0) + 3p(1) - 2p'(0) - p'(1) \\
a_3 &= 2p(0) - 2p(1) + p'(0) + p'(1)
\end{aligned}
$$

Hermitekurve

Dermed bestemmes polynomiet $p(t)$ ved indsætning af a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\begin{aligned}
p(t) &= p(0) + p'(0)t + (-3p(0) + 3p(1) - 2p'(0) - p'(1))t^2 \\
&\quad + (2p(0) + 2p(1) + p'(0) + p'(1))t^3 \\
&= {}^{1}(1 - 3t^2 + 2t^3)p(0) + (3t^2 - 2t^3)p(1) \\
&\quad + (t - 2t^2 + t^3)p'(0) + (-t^2 + t^3)p'(1) \\
&= F_1(t)p(0) + F_2(t)p(1) + F_3(t)p'(0) + F_4(t)p'(1)
\end{aligned}$$

Hermitepolynomier:

$$F_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad F_2(t) = 3t^2 - 2t^3$$
$$F_3(t) = t - 2t^2 + t^3 \quad F_4(t) = -t^2 + t^3$$

De samme polynomier for hver opgave!

Det der ændrer sig (variable) er værdierne $p(0), p(1), p'(0), p'(1)$.

[1] Sortering!

Opgave: Find 3.grads parameterfremstilling

med vektorfunktion $\mathbf{p}(t)$, vektorer $\mathbf{a}_i$

$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$ sål. at

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_b = \mathbf{p}(0) &= \mathbf{a}_0 \\
\mathbf{P}_s = \mathbf{p}(1) &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \\
\mathbf{h}_b = \mathbf{p}'(0) &= \mathbf{a}_1 \\
\mathbf{h}_s = \mathbf{p}'(1) &= \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3
\end{aligned}
$$

fører til et lineært ligningssystem med løsning:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_0 &= \mathbf{p}(0) \\
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{p}'(0) \\
\mathbf{a}_2 &= -3\mathbf{p}(0) + 3\mathbf{p}(1) - 2\mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}'(1) \\
\mathbf{a}_3 &= 2\mathbf{p}(0) - 2\mathbf{p}(1) + \mathbf{p}'(0) + \mathbf{p}'(1)
\end{aligned}
$$

Kubisk parameterfremstilling

Dermed bestemmes den kubiske parameterfremstilling $\mathbf{p}(t)$ ved ved indsætning af $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(0) + \mathbf{p}'(0)t + (-3\mathbf{p}(0) + 3\mathbf{p}(1) - 2\mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}'(1))t^2 \\
&\quad + (2\mathbf{p}(0) + 2\mathbf{p}(1) + \mathbf{p}'(0) + \mathbf{p}'(1))t^3 \\
&= (1 - 3t^2 + 2t^3)\mathbf{p}(0) + (3t^2 - 2t^3)\mathbf{p}(1) \\
&\quad + (t - 2t^2 + t^3)\mathbf{p}'(0) + (-t^2 + t^3)\mathbf{p}'(1) \\
&= F_1(t)\mathbf{p}(0) + F_2(t)\mathbf{p}(1) + F_3(t)\mathbf{p}'(0) + F_4(t)\mathbf{p}'(1)
\end{aligned}$$

Hermitepolynomier:

$$F_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 \quad F_2(t) = 3t^2 - 2t^3$$
$$F_3(t) = t - 2t^2 + t^3 \quad F_4(t) = -t^2 + t^3$$

De samme polynomier for hver opgave!

Det der ændrer sig (variable) er: $\mathbf{p}(0), \mathbf{p}(1), \mathbf{p}'(0), \mathbf{p}'(1)$.

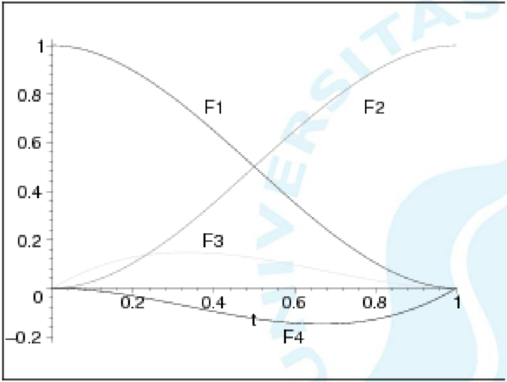
Hermitepolynomier

$F_1(t) := 2t^3 - 3t^2 + 1$

$F_2(t) := -2t^3 + 3t^2$

$F_3(t) := t^3 - 2t^2 + t$

$F_4(t) := t^3 - t^2$



Hermitekurve $\mathbf{p}(t) = F_1(t)P_b + F_2(t)P_s + F_3(t)\mathbf{v}_b + F_4(t)\mathbf{v}_s$
3.grads kurve med begyndelses- og slutpunkt P_b, P_s samt begyndelses- og sluthastighedsvektor $\mathbf{v}_b$, $\mathbf{v}_s$.

Bézierkurver af orden 3

Kubiske Bernsteinpolynomier

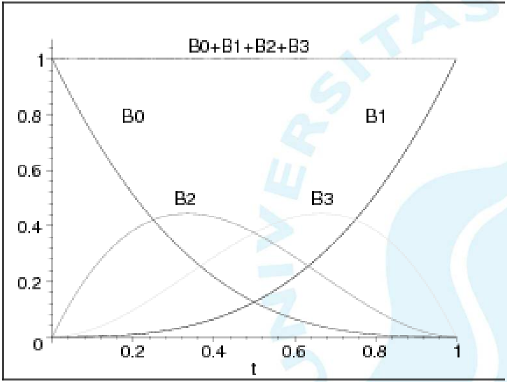
$B_{0,3}(t) := (1-t)^3 = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$

$B_{1,3}(t) := 3(1-t)^2 t := 3t^3 - 6t^2 + 3t$

$B_{2,3}(t) := 3(1-t)t^2 = -3t^3 + 3t^2$

$B_{3,3}(t) := t^3$

$B_{0,3} + B_{1,3} + B_{2,3} + B_{3,3} = 1$



$\mathbf{B}(t) = B_{0,3}(t)Q_0 + B_{1,3}(t)Q_1 + B_{2,3}(t)Q_2 + B_{3,3}(t)Q_3$

3. grads Bézierkurve til kontrolpunkterne Q_0, Q_1, Q_2, Q_3.

Hermitekurver er 3.grads kurver som bestemmes ved
begyndelsespunkt P_b og slutpunkt P_s samt
begyndelseshastighed $\mathbf{v}_b$ og sluthastighed $\mathbf{v}_s$.

Bézierkurver af grad 3 bestemmes ved fire kontrolpunkter:
begyndelsespunkt Q_0 og slutpunkt Q_3 samt
to håndtag (eller magneter) Q_1 og Q_2.
Man kan specificere den samme 3.ordens-kurve både som Hermitekurve og som Bézierkurve.

Hermitekurve: endepunkter P_b, P_s, endehastighedsvektorer $\mathbf{v}_b, \mathbf{v}_s$.
Bézierkurve: kontrolpunkter Q_0, Q_1, Q_2, Q_3.
Hvis de skal bestemme samme 3. grads kurve:

$$F_1(t)P_b + F_2(t)P_s + F_3(t)\mathbf{v}_b + F_4(t)\mathbf{v}_s \overset{(*)}{=} B_{0,3}(t)Q_0 + B_{1,3}(t)Q_1 + B_{2,3}(t)Q_2 + B_{3,3}(t)Q_3.$$

Indsæt $t = 0, t = 1$: $P_b = Q_0, P_s = Q_3$ (samme endepunkter).
Indsæt $t = 0, t = 1$ i den afledede til ligning (*):

$$\mathbf{v}_b = -3Q_0 + 3Q_1 = 3\overrightarrow{Q_0Q_1} \qquad \mathbf{v}_s = -3Q_2 + 3Q_3 = 3\overrightarrow{Q_2Q_3}$$

Begynd.-hastighed	$= 3\cdot$ vektor mellem de to første kontrolpkter
Sluthastighed	$= 3\cdot$ vektor mellem de to sidste kontrolpkter