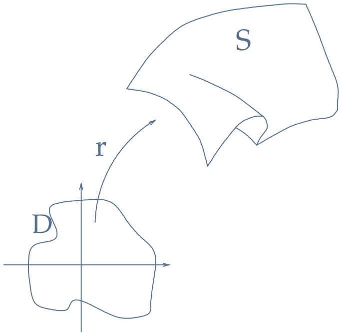
Kurver og flader i geometri, arkitektur og design 19. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

18.4.2011

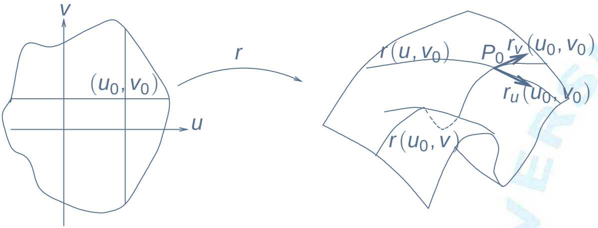
Parameterfremstilling for en flade



En parameterfremstilling for en flade S i rummet er givet ved en vektorfunktion af to variable (u, v):
$\mathbf{r} : \mathbf{R}^2 \supseteq D \to \mathbf{R}^3$,
$\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$.
Horizontale og vertikale linier overføres til et krumt koordinatsystem på fladen.

Eksempel: En kortprojektion for en kugleflade: det krumme koordinatsystem består af længde- og breddecirkler.

Parameterkurver og partielle afledede

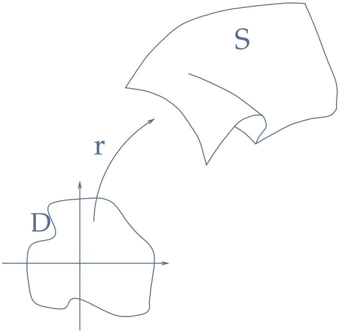


Gennem punktet P_0 med $\overrightarrow{OP_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ løber

u-kurven (1. parameterkurve) $\mathbf{r}(u, v_0)$ med hastighedsvektor $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ i P_0

v-kurven (2. parameterkurve) $\mathbf{r}(u_0, v)$ med hastighedsvektor $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ i P_0

Regulære parameterfremstillinger



$D \subseteq \mathbf{R}^2$ åben.
$\mathbf{r} : D \to \mathbf{R}^3$ en glat (C^∞) og injektiv (én til én) vektorfunktion af to variable.
$\mathbf{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$
De partielle afledede

$\mathbf{r}_u(u_0,v_0), \mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ er lineært **u**afhængige for alle $(u_0,v_0) \in D$.
Dermed udspænder de en (tangent)plan!

Kurver på en flade og tangentvektorer

Givet parameterfremstilling $\mathbf{r} : \mathbf{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbf{R}^3$. Den beskriver korrespondance mellem kurver i parameterområdet U i planen og kurver på fladen S givet ved

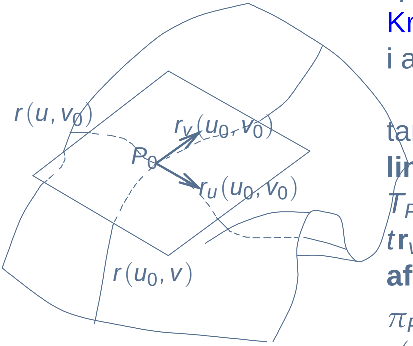
$$[u(t), v(t)] \in U \mapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \in \mathbf{R}^3.$$

Beregning af hastighedsvektor/tangent til denne kurve i P_0 med $\overrightarrow{OP_0} = [u_0, v_0] = \mathbf{x}(u(t_0), v(t_0))$ ved hjælp af kædereglen:

$$\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^3, \qquad t \mapsto [u(t), v(t)] \mapsto \mathbf{r}(u(t), v(t)).$$

$$\mathbf{x}'(t_0) = u'(t_0)\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + v'(t_0)\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$$
$$\in span\{\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\}.$$

Alle hastighedsvektorer til kurver på S gennem P_0 ligger altså i denne tangentplan!



Tangentplan til fladen S i punktet $P_0 = span\{\mathbf{r}_u(u_0,v_0), \mathbf{r}_v(u_0,v_0)\}$.
Krav: $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ lineært uafhængige i alle $[u,v] \in U$.

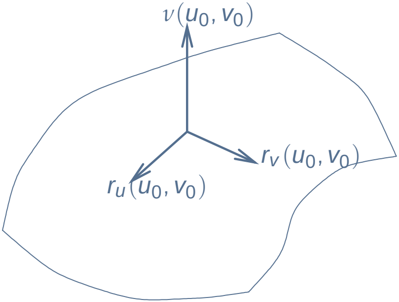
Parameterfremstillinger for tangentplan i P_0:

lineær tangentplan:
$T_{P_0}S = \{s\mathbf{r}_u(u_0,v_0) + t\mathbf{r}_v(u_0,v_0),\ s,t \in \mathbf{R}\}$.

affin tangentplan:
$\pi_{P_0}S = \{Q \in \mathbf{E}^3 | \overrightarrow{OQ} = \mathbf{r}(u_0,v_0) + s\mathbf{r}_u(u_0,v_0) + t\mathbf{r}_v(u_0,v_0),\ s,t \in \mathbf{R}\}$.

Den affine tangentplan approksimerer fladen ved P_0.

Normalvektor og ligning for tangentplan



En normalvektor til S i P_0: $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$.
Enhedsnormalvektor til S i P_0:

$$\nu = \frac{\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)}{|\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)|}$$

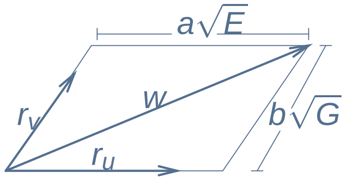
Ligning for affin tangentplan $\pi_{P_0}S$:
$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{x} = [x, y, z]$ skal opfylde ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \text{ med:}$$

- $[a, b, c] = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \leftarrow$ normalvektor
- $[x_0, y_0, z_0] = \mathbf{r}(u_0, v_0) \leftarrow$ punkt i S og i tangentplan

Pythagoras i skæve koordinater

Længde af vektor $\mathbf{w} = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v$ i det “skæve” koordinatsystem med basisvektorer $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$:



$$|\mathbf{w}|^2 = |a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v|^2 = (a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v)\cdot(a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v) = a^2(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u) + 2ab(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v) + b^2(\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v) = a^2E + 2abF + b^2G.$$

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \mathbf{r}_u(u,v)\cdot\mathbf{r}_u(u,v) \\ F(u,v) &= \mathbf{r}_u(u,v)\cdot\mathbf{r}_v(u,v) \\ G(u,v) &= \mathbf{r}_v(u,v)\cdot\mathbf{r}_v(u,v) \end{aligned}$$

Kurvelængde i krumme koordinater

Kurve givet ved parametrisering $\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$.
Hvordan kan kurvens koordinater $(u(t), v(t))$ i kortet bruges til at beregne kurvens længde på fladen?

kurve	$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$
hastighed	$\mathbf{x}'(t) = u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v$
fart[2]	$\lvert\mathbf{x}'(t)\rvert^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$
kurvelængde[1]	$s(T) = \int_a^T \lvert\mathbf{x}'(t)\rvert\, dt = \int_a^T \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt.$

[1] længde af kurven $(u(t), v(t))$ i planen: $\int_a^T \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}\, dt$