Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 2.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 2.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 2.

Næste gang:

Mål og indhold:

Repetition:

Matrixmultiplikation: Definition, egenskaber, interpretation.
Regulære (invertible) matricer: Definition, egenskaber.

Nyt stof:

En rækkeoperation kan opfattes som multiplikation med en elementær matrix ([SIF], p. 126). Derfor kan man beskrive overgangen fra en given matrix A til den rækkeækvivalente matrix R på reduceret echelonform ved multiplikation med en regulær matrix P; nemlig produktet af en hel del elementære matricer (Theorem 2.3).

Dette syn på rækkereduktion kan bruges til et kort argument for hvorfor Gauss-algoritmen faktisk virker. Desuden kan man overbevise sig om, at lineært (u)-afhængige søjler i den oprindelige matrix A og i echelonmatricen R svarer til hinanden ("column correspondece property" og Theorem 2.4).

Hvordan ser situationen ud når udgangsmatricen A er regulær? I dette tilfælde (og kun i dette) er den reducerede echelonmatrix $R = I$ – identitetsmatricen. Dette resultat er nøglen for en systematisk metode som tillader på samme tid at afgøre om en given $(n \times n)$-matrix A er regulær og i givet fald at finde den inverse matrix (den er dog kun praktikabel for et menneske hvis n er af moderat størrelse):
Man danner den udvidede $n \times 2n$-matrix $[A|I_n]$ - med den n-dimensionelle identitetsmatrix I_n på højresiden og gennemfører rækkeoperationer på denne nye større matrix. Matricen A er regulær hvis og kun hvis denne matrix er rækkeækvivalent til en matrix på formen $[I_n|C]$ - altså skal A have Pivotelementer i hver søjle og dermed hver række - og i så fald finder man den inverse matrix på højresiden:

$$A^{-1} = C.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 - 4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Der findes mange forskellige kriterier til at beskrive/afgøre om en given kvadratisk matrix er invertibel; de er sammenfattet i Theorem 2.6, pp. 138.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN

Litteratur:

SIF 2.3 – 2.4, pp. 126 – 140.

Komp 10, 14 – 16.

Wikipedia Invertible matrix

Software:

- Matrix Calculator Applet
- Find the Inverse Matrix

Opgaver:

Ch. 2.1 13, 15, 17, 19, 33 – 49

Ch. 2.3 1, 3, 9, 11, 13, 15, 17, 33 – 52.

Ch. 2.1+ 69

Ch. 2.3+ MATLAB: 95, 97.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN