AALBORG UNIVERSITET
DET TEKNISK-NATUR-VIDENSKABELIGE FAKULTET
FØRSTE STUDIEÅR

MARTIN RAUSSEN

Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 4.

Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 4.

Opgaveregning:

kl.):25 – 11:20 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 11:25 – 12:00 i Auditorium 4.

Næste gang:

8. lektion. Tirsdag, 11.10., kl. 12:30 – 16:15. Sammensatte og invertible lineære afbildninger. [SIF], ch. 2.8.

Mål og indhold:

Repetition:

Hvordan afgør man om en matrix er regulær og bestemmer, i givet fald, dens inverse? Elementære matricer. Kriterier for regularitet.

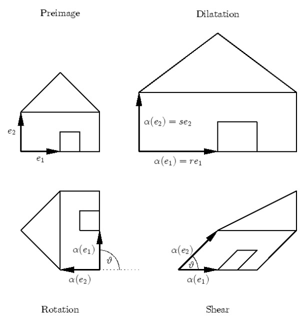
Nyt stof:

Mange har sikkert allerede spurgt: Hvad kan man bruge matricer til. Det første svar lyder: som beskrivelse for lineære afbildninger.

En afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (f.eks. en projektion fra rummet ind i planen) lader til enhver vektor $\mathbf{x}$ i definitionsmængden[1] $\mathbf{R}^n$ svare en vektor $T(\mathbf{x})$ i dispositionsmængden[2] $\mathbf{R}^m$ – den "spiser" n-vektorer og "afleverer" m-vektorer. Sådan en afbildning[3] kaldes lineær, hvis den respekterer linearkombinationer, se definitionen og egenskaber på lærebogens s. 171.

Vigtige egenskaber: En lineær afbildning

- overfører rette linier i rette linier
- bevarer proportioner langs med en ret linie



Vi verificerer at afbildningen $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, som er givet ved multiplikation med en $m \times n$-matrix A, altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, er lineær. Omvendt:

Standardmatricen for en lineær afbildning: Faktisk kan man beskrive enhver lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ som en matrixafbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, hvor A er en $(m \times n)$-matrix, som kaldes standardmatricen (eller matrix præsentationen) for den lineære afbildning T.

[1] eng.: domain
[2] eng.: codomain
[3] eng.: transformation, map

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
-
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN

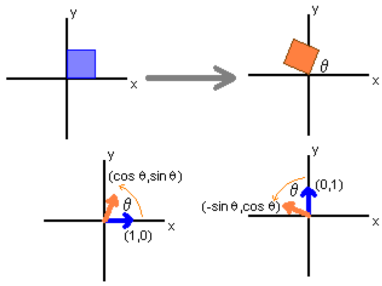
Her er opskriften til hvordan man finder A: Man tager standard enhedsvektorene $\mathbf{e}_i$: et 1-tal i position i, 0-taller på alle andre positioner. Så bestemmer man deres billeder $T(\mathbf{e}_i)$ under den lineære afbildning T. Disse vektorer $T(\mathbf{e}_i)$ indsættes nu efter tur som søjler i standardmatricen A. På formelsprog:

$$A = [T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)].$$

Konsekvens: En lineær afbildning kan beskrives ekstremt økonomisk: Man behøver kun at kende de nm talkoefficienter i afbildningens standarmatrix!

Geometriske eksempler for lineære afbildninger:
Mange geometrisk væsentlige afbildninger er lineære, og vi bestemmer deres standardmatricer:

- drejninger om Origo i plan og rum,
- spejlinger i en linie gennem Origo i planen, hhv. i en plan gennem Origo i rummet,
- skaleringer,
- strækninger og skrumpninger i aksernes retninger,
- shears = "vridninger",
- projektioner
- ...



Litteratur:

SIF Ch. 2.7, pp. 167 –175.

Komp 20 – 22.

Wikipedia Linear map

Software:

Med de følgende to applets fra nettet kan man illustrere effekten af en lineær afbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ fra planen ind i planen:

- Linear Transformations 1
- Linear Transformations 2

Opgaver:

Ch. 2.3 67, 77.

Ch. 2.4 3, 5, 9, 13, 19, 27, 57, 35 – 54.

Ch. 2.7 1, 3, 7, 11, 21, 25.

Ch. 2.3+ 89.

Ch. 2.4+ 59, 67.