Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 2.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 2.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 2.

Næste gang:

Torsdag, 13.10., 12:30 – 16:15.
Introduktion til determinanter.
SIF, ch. 3.1.

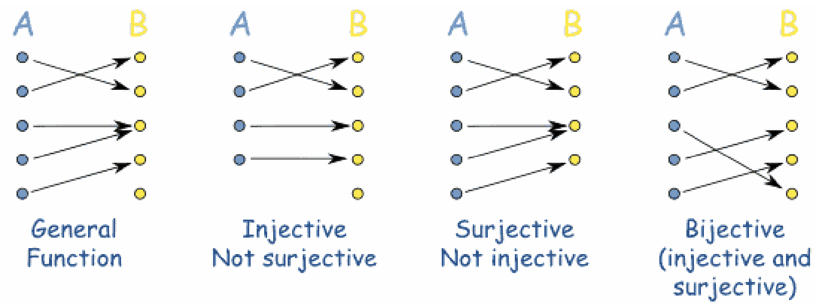
Mål og indhold:

Repetition:

Lineære afbildninger.
Standardmatricer.

Nyt stof:

Surjektivitet, injektivitet, nulrum:
Vi kan bruge matrix præsentationen (standardmatricen) til at afgøre om en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er surjektiv (på)[1], hhv. injektiv (enentydig) [2].



- T er surjektiv, hvis hver vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ ligger i billedmængden af T: der findes mindst en vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ med $T(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$.
  En projektion er surjektiv.

- T er injektiv, hvis der til enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ findes højst en vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ med $T(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$.

Beskrives afbildningen T ved en $(m \times n)$-matrix A, så er kravene for

surjektivitet at matricens søjler udspænder $\mathbf{R}^m$; matricen har rang m;

injektivitet at matricens søjler skal være lineært uafhængige; matricen har rang n.

[1] eng.: onto
[2] eng.: one-to-one

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
-
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN

Dette kan checkes ved at se efter om der er Pivotpositioner i hver række (surjektivitet), hhv. i hver søjle (injektivitet).

Særskilt væsentlig er Ts nulrum, som består af alle vektorer $\mathbf{x}$ som opfylder $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Hvis T har standardmatricen A, så findes nulrummet som løsningsmængde til det homogene ligningssystem givet ved $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Afbildningen T er injektiv hvis og kun hvis denne nulrum kun indeholder vektoren $\mathbf{0}$ og ikke andre.

Multiplikationen af matricer: Hvis den lineære afbildning T_1 har standardmatrix B og den lineære afbildning T_2 har standardmatrix A: hvilken matrix repræsenterer så deres sammensætning $T_2 \circ T_1$? Denne matrix findes ved multiplikation AB af de to matricer. Med andre ord: Kender man f.eks. standardmatricen for en drejning og for en spejling, så kan man finde standardmatricen for sammensætningen[3] af disse to afbildninger ved at gange matricerne sammen.

Og specielt: En lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er bijektiv = invertibel – der findes en "undo" invers lineær afbildning $T^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – hvis og kun hvis Ts standardmatrix er regulær.

Litteratur:

SIF Ch. 2.8.

Komp 20, 23, 24.

Wikipedia Bijection, injection and surjection

Opgaver:

Ch. 2.7 27, 29, 33, 35 – 54, 57, 75, 77.

Ch. 2.8 1, 3, 13, 25.

Ch. 2.7+ 79, 103 (Matlab)

[3] "først den ene, så den anden"; eng. composition

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST
9940 8855
-
RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN