Underviser:

Denne gang og på kommende torsdag undervises I af min kollega Olav Geil.

Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 8:15 – 8:45 i Auditorium 4.

Forelæsningens 1. del:

kl. 8:50 – 9:25 i Auditorium 4.

Opgaveregning:

kl. 9:30 – 11:20 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 11:25 – 12:00 i Auditorium 4.

Næste gang:

17. lektion, 10.11., 12:30 – 16:15.
Egenværdier og egenvektorer.
SIF, ch. 5.1 – 5.2

Mål og indhold:

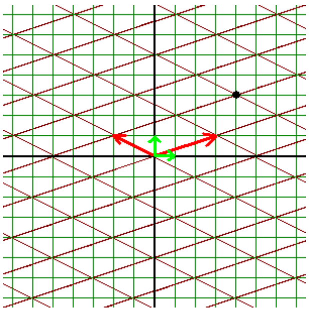
Repetition:

Vektorers koordinater med hensyn til en basis.
Beskrivelse af keglesnit.

Nyt stof:

Vi har tidligere set hvordan man beskriver en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ved hjælp af en standard matrix. Til det benyttede vi standardbaser $\mathcal{E}_n$ for definitionsmængden $\mathbf{R}^n$ og $\mathcal{E}_m$ for dispositionsmængden $\mathbf{R}^m$.

Nu tager vi os af det specielle tilfælde af lineære afbildninger $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ og spørger efter en matrixbeskrivelse med hensyn til en anden basis $\mathcal{B}$ end standardbasen $\mathcal{E}$ for $\mathbf{R}^n$. Det viser sig – især i det næste afsnit om egenvektorer – at man kan opnå meget "pænere" matricer ved valg af en basis som "passer" til den lineære afbildning.



Den nye metode ligner den gamle, men nu beskrives alle vektorer med hensyn til basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Beskrivelsen $[T]_{\mathcal{B}}$ for en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ med hensyn til $\mathcal{B}$ givet ved matricen

$$[T]_{\mathcal{B}} = [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}, [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}];$$

man noterer billederne af basisvektorerne som søjlevektorer – med deres koordinater med hensyn til basis $\mathcal{B}$. Denne matrix opfylder ligningen

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [[T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Det er nemt at se for $\mathbf{v} = \mathbf{b}_i$ – og kan ved linearitet overføres til generelle vektorer.

Hvad er sammenhængen mellem beskrivelserne for (den samme) lineære afbildning T? Hvis A er standardmatricen for T (dvs med hensyn til standardbasis $\mathcal{E}$ for $\mathbf{R}^n$ og B er $n \times n$-matricen hvis søjler er basisvektorerne i basis $\mathcal{B}$, så gælder:

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}} &= B^{-1}AB \\ A &= B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1}.\end{aligned}$$

De to matricer er similære: Generelt kalder man to $n \times n$-matricer A, C similære hvis der findes en regulær $n \times n$-matrix B således at $C = B^{-1}AB$.

Et eksempel: $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ er en spejling i en akse som har vinkel θ med X-aksen. Med hensyn til den (tilpassede) basis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{bmatrix}\}$$

har T den simple matrix beskrivelse $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$ mens standardmatricen $A = \begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$ er mere kompliceret.

Litteratur:

SIF Ch. 4.5.

Komp 27 – 30.

Wikipedia Change of basis
Similar matrix

Opgaver:

Ch. 4.4 19, 25, 27, 31 – 50, 51

Ch. 4.5 1, 3, 11, 13.

Ch. 4.4+ 55, 67, 79, 87, 99.