Underviser:

Olav Geil.

Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 2.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 2.

Opgaveregning:

kl. 13: 45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 2.

Næste gang:

18. lektion. Mandag, 21.11., 8:15 – 12:00.
Diagnoalisering af matricer og lineære afbildninger.
SIF, 5.3 – 5.4.

Mål og indhold:

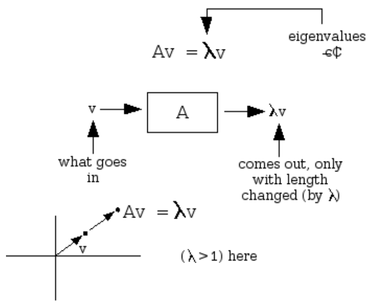
Repetition:

Matrixbeskrivelse af lineære operatorer med hensyn til alternative baser.
Similaritet.

Nyt stof:

Egenvektorer og egenværdier (for en matrix, hhv. en lineær afbildning): Egenvektorer hjælper til forståelsen af den geometriske betydning af en lineær afbildning givet ved en kvadratisk matrix.

Definitionen siger, at en egenvektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ for en (kvadratisk) matrix A afbildes på et multiplum $\lambda\mathbf{x}$ af sig selv: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Faktoren $\lambda \in \mathbf{R}$ så er en egenværdi for A; det er en forstørrelses/formindskelsesfaktor langs med den rette linje (gennem Origo) givet ved $\mathbf{x}$. Ikke alle lineære afbildninger har egenvektorer: Tænk f.eks. på en rotation i planen!



For at finde egenværdier og tilhørende egenvektorer og egenrum omformuleres ligningen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ til $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med enhedsmatricen I. Nu søger vi først efter reelle tal λ, således at matricen $A - \lambda I$ har et ikke-trivielt nulrum

$$E_\lambda = Null(A - \lambda I):$$

netop disse tal λ bliver matricens egenværdier.

For hver funden egenværdi λ ønsker man så at bestemme det tilhørende egenrum E_λ bestående af alle egenvektorer hørende til λ – som nullrummet $Null(A - \lambda I)$, og dermed som et underrum af $\mathbf{R}^n$.

For trekantsmatricer er det nemt at finde de tilhørende egenværdier: det er bare koefficienterne på diagonalen.

Hvordan finder man egenværdier for en generel $n \times n$-matrix A? Fra teorien om determinanter ved vi at en kvadratisk matrix er singulær (med ikke-triviel nulrum) hvis og kun hvis dens determinant er lig med 0. Derfor beregner man As karakteristiske polynomium som $\det(A - tI)$; det bliver et polynomium i variablen t af grad n.

Egenværdierne for A er netop rødderne for dette karakteristiske polynomium. Rødderne optræder med hver deres algebraiske multiplicitet i en faktorisering af dette polynomium – den største potens af $t - \lambda$ som optræder i faktoriseringen.

Egenværdiens geometriske multiplicitet er givet som dimensionen af egenrummet E_λ. Den er højst lig med den algebraiske multiplicitet.

Ved hjælp af multiplikationsreglen er det nemt at se at similære matricer har det samme karakteristiske polynomium, og dermed de samme egenværdier med de samme algebraiske multipliciteter. Ovenikøbet stemmer deres geometriske multipliciterer overens.

Litteratur:

SIF Ch. 5.1 – 5.2

Komp 30 – 33.

Wikipedia Eigenvalues and eigenvectors

Demo og beregning på nettet

- Eigenvalue Applet with Sound
- Beregning af karakteristiske polynomier, egenværdier og egenvektorer

Opgaver:

Ch. 4.5 7, 15, 19 – 38, 39, 55, 43, 47, 51.

Ch. 5.1 3, 7, 13, 21, 25.

Ch. 4.5+ 45, 61, 95.

Fredrik Bajersvej 7G — 9940 8855 — raussen@math.aau.dk
9220 Aalborg Øst — - — people.math.aau.dk/~raussen