Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 2.

Forelæsningens 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 2.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsningens 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 2.

Næste gang:

Mål og indhold:

Repetition:

Diagonalisering af matricer og lineære operatorer.

Nyt stof:

Prikproduktet mellem vektorer indeholder information om vektorers længde, afstand og vinkler. Den vigtigste anvendelse tillader at aflæse om to vektorer er vinkelrette på hinanden: De gør de netop når deres indbyrdes prikprodukt er lig med 0; og det hænger nøje sammen med Pythagoras sætning. Med udgangspunkt i dette værktøj finder man frem til følgende metoder og resultater:

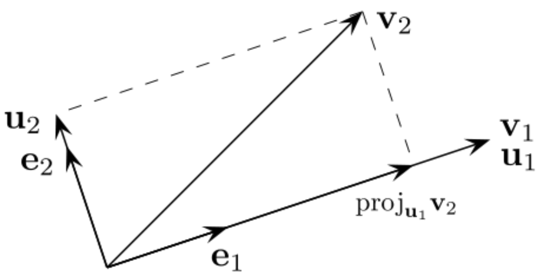
- Ortogonalprojektion på en linje givet ved en vektor $\mathbf{v}$: En anden vektor $\mathbf{u}$ skrives på formen $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ med $\mathbf{w}$ parallel med og $\mathbf{z}$ vinkelret på $\mathbf{u}$.
- Cauchy-Schwarz uligheden – og vinkler mellem vektorer: Vinklen α mellem to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ opfylder: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \, \| \mathbf{v} \| \cos(\alpha)$.[1]
  Cauchy-Schwarz uligheden sikrer at det giver mening; det skal jo være sådan at $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$.
- Trekantsuligheden: Den oplagte sammenhang mellem længden af de tre sidelængder i en trekant udtrykt ved vektorer.

En ortogonalbasis består af et antal vektorer $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ som er indbyrdes ortogonale: $i \neq j \Rightarrow \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$. Vektorer i en ortogonalbasis er automatisk lineært uafhængige (Thm. 6.5) og deres spænd er derfor maksimalt stort. Envher vektor i spændet har entydige koordinater, og de er nemt at beregne (nederst på p. 376, specielt simpel hvis alle vektorer har længde 1 – i så fald taler man om en ortonormalbasis.

Hvis man har et antal lineært uafhængige vektorer $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, så findes der en systematisk metode til at "ortogonalisere" dem, dvs. at finde en ortogonalbasis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ med samme spænd. Metoden kaldes Gram-Schmidt[2]-metoden og bygger på ortogonalprojektioner.

[1] Denne formel står ikke i bogen her, men den er kendt fra ungdomsuddannelserne: Cosinusrelationerne!

[2] dansk-tysk samarbejde!



Gram-Schmidt-metoden kan udnyttes til QR-faktorisering af matricer (med lineært uafhængige søjlevektorer): Enhver sådan $m \times n$-matrix A kan skrives som produkt $A = QR$ med en $m \times n$-matrix Q hvis søjlevektorer er ortonormale og en $n \times n$ øvre trekantsmatrix R. Løsning af ligningssystemer med A som koefficientmatrix bliver lettere ved brug af en sådan faktorisering.

Litteratur:

SIF Ch. 6.1 – 6.2

Komp 2-4, 30, 34 – 35.

Wikipedia Gram-Schmidt process

Wikipedia QR-decomposition

YouTube Gram Schmidt process in space

Algoritmer på nettet:

- Gram Schmidt orthogonalization applet Online Matrix Calculator med bl.a. QR faktorisering

Opgaver:

Ch. 5.3 15, 29 – 48, 49, 57, 63.

Ch. 5.4 1, 3, 5, 9, 21, 29 – 38.

Ch. 6.1 1, 9, 13, 33, 43.

Ch. 5.3+ 51, 59.

Ch. 5.4+ 13.

FREDRIK BAJERSVEJ 7G
9220 AALBORG ØST

9940 8855
-

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
PEOPLE.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN