

Køreplan:

Repetition og perspektivering:

kl. 12:30 – 13:00 i Auditorium 2.

Forelæsnings 1. del:

kl. 13:05 – 13:40 i Auditorium 2.

Opgaveregning:

kl. 13:45 – 15:35 i grupperummene.

Forelæsnings 2. del:

kl. 15:40 – 16:15 i Auditorium 2.

Næste gang:

22. lektion. Mandag, 5.12.2011, 8:15 – 12:00.
Ortogonal matricer. SIF, ch. 6.5

Mål og indhold:

Repetition:

Ortogonalbaser. Gram-Schmidt algoritme og QR-faktorisering.

Nyt stof:

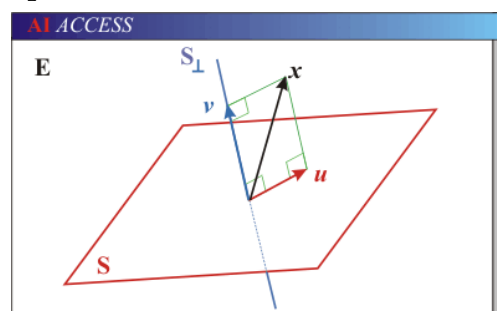
Det **ortogonale komplement** $S^\perp$ til en mængde $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ af n -dimensionale vektorer består af alle vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ som står vinkelret på **alle** vektorer i S . Man checker uden problem at $S^\perp$ altid er et underum i $\mathbb{R}^n$. Det ortogonale komplement afhænger kun af det af S udspændte underum $\text{Span}(S)$, og derfor er det fornuftigt at tage udgangspunkt i en lineært uafhængig mængde vektorer i S .

Løsningsmængden af et homogent lineært ligningssystem med koefficientmatrix A kan formuleres og forstås ved hjælp af ortogonale komplement: Nulmængden $\text{Null}A$ er lig med det ortogonale komplement til rækkerummet $\text{Row}(A)$.

Omvendt finder man en basis til det ortogonale komplement $S^\perp$ til S ved at notere vektorerne i S – helst lineært uaf-

hængige! – som **rækker** i en matrix A og ved at bestemme matrixens nulrum: $S^\perp = \text{Null}(A)$. Metoden er den gode gamle rækkereduktion til reduceret echelonmatrix.

Tager man udgangspunkt i et **underum** $W \leq \mathbb{R}^n$, så kan man opdele en hvilken som helst vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ som $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ med $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^\perp$ – på netop en måde. Dette medfører, at $\dim W + \dim W^\perp = n$ – dimensionerne er komplementære.



Denne opdeling af vektorer ligger til grund for **ortogonalprojektion** $U_W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ hvor $U_W(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{u} - \mathbf{w} \in W^\perp$. Vektoren $\mathbf{w}$ er den vektor i W som kommer tættest på $\mathbf{u}$ – en konsekvens af Pythagoras sætning. Derfor er det fornuftigt at definere afstanden af vek-

toren $\mathbf{u}$ fra underrummet W som længden $\|\mathbf{u} - U_W(\mathbf{u})\|$.

Ortogonalprojektionen $U_W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ er en **lineær afbildning**; hvordan bestemmer man den tilhørende standardmatrix? Man starter med en basis for underrummet W og noterer basisvektorerne som søjler i en $(n \times k)$ -matrix C . Standardmatricen P_W – en $(n \times n)$ -matrix – er så givet ved følgende formel: $P_W = C(C^T C)^{-1} C^T$. Man skal selvfølgelig først vide at matricen $C^T C$

er regulær! Man checker nemt, at $P_W P_W = P_W$; og det kommer ikke som en overraskelse!

Litteratur:

SIF Ch. 6.3

Komp 2, 36 – 38.

Wikipedia Orthogonal complement
Projektion

Opgaver:

Ch. 6.1 55, 57, 59, 61–80.

Ch. 6.2 1, 3, 9, 11, 13, 41 – 52.

Ch. 6.3 1, 3, 5.

Ch. 6.1+ 95, 97.

Ch. 6.2+ 25, 27, 29, 33, 35, 37.