Lineær algebra: Lineære ligningssystemer

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Ligningssystemer og matricer

Til et ligningssystem svarer der en totalmatrix $[A|\mathbf{b}]$ bestående af koefficientmatrix A og højreside $\mathbf{b}$.
Omvendt oversættes totalmatricen $[A|\mathbf{b}]$ til matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med den ubekendte vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – et lineært ligningssystem "på kort form".

ledende koefficient i en række: det første element $\neq 0$!

Navn	Formål (i en søjle)
Rækkeombytning	ledende koefficient op, 0-taller ned!
Rækkeaddition	0-taller under/over ledende koefficient!
Rækkemultiplikation	ledende koefficient 1!

To matricer kaldes rækkeækvivalente hvis man kan overføre den ene i den anden ved en eller flere elementære rækkeoperationer.

Hvorfor? To ligningssystemer svarende til rækkeækvivalente totalmatricer har samme løsningsmængde!

Hvad kan man opnå gennem systematisk anvendelse af rækkeoperationer?

Række Echelon-matricer

En matrix på echelonform har

1. alle 0-rækker nederst.
2. De ledende koefficienter (først i rækken $\neq 0$) flytter til højre når man vandrer ned ad rækkerne.
   (Konsekvens: I området under og til venstre for en ledende koefficient står der kun 0-taller).

Reducerede række Echelon-matricer

En matrix på reduceret echelonform opfylder desuden:

1. Ledende koefficienter $= 1$ – kaldes Pivoter.
2. Også over Pivoter står der kun 0-taller.

En matrix kan ved rækkeoperationer overføres til forskellige matricer på echelonform, men kun til en matrix på reduceret echelonform.

Rækkereduktion til echelonform
Gauss-algoritmen (forlæns)

Algoritmen (regnemetoden) går igennem matricens søjler fra venstre til højre. Den bruger

r-ombytning for at opnå at ledende koefficienter længst vil venstre optræder i rækken lige under den sidst opnåede Pivotposition

r-addition for at opnå at der kun står 0-taller under denne ledende koefficient.

I hver søjle: højst en ombytning, men ofte flere additioner.
Resultat: En rækkeækvivalent matrix på echelonform.

Rækkereduktion til reduceret echelonform
Gauss-Jordan-algoritmen (baglæns)

Algoritmen fortsætter fra en matrix på echelonform. Den går igennem Pivotelementer fra venstre til højre og bruger

r-multiplikation for at opnå at Pivotelementet bliver 1.

r-addition for at opnå at der også står 0-taller over Pivotelementet.

Resultat: Den rækkeækvivalente matrix på reduceret echelonform.

Ligningssystemet svarende til en matrix på reduceret echelonform løses nemt ved at isolere de bundne variable (svarende til Pivotsøjler).

Løsningsmængden L for et lineært ligningssystem I

"The general solution"

Løsningsmængden beskriver alle løsninger:
$L = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n |\ x_1, \dots x_n \text{ opylder alle } m \text{ ligninger}\} \subset \mathbf{R}^n$

- Hvis en rækkeækvivalent echelonmatrix indeholder en række på formen $[00 \cdots 0|c]$ med $c \neq 0$, så er systemet inkonsistent – ingen løsning – $L = \emptyset$.
- Hvis ikke, så svarer hver Pivotsøjle (som indeholder en ledende koefficient) til en bunden variabel og hver af de andre til en fri variabel.
- Er der kun bundne variable, så har systemet en entydig løsning – L har netop ét element $[x_1, \cdots, x_n]$.
  Denne løsning findes umiddelbart ud fra den reducerede echelonmatrix.

Løsningsmængden L for et lineært ligningssystem II
Frie variable – bundne variable

- Frie variable kan antage vilkårlige reelle tal som værdier, uafhængigt af hinanden.
- De bundne variable udtrykkes som linearkombinationer af de frie – ved substitution med udgangspunkt i echelonmatrix.
  Resultat: en parameterfremstilling for løsningsmængden L.
- L har uendelig mange løsninger hvis et konsistent system giver anledning til en eller flere frie variable (søjler uden Pivot).

Fra ligningssystem til løsningsmængde

Trin for trin

1. Overfør ligningssystemet til (udvidet) matrix
2. Rækkereduktion $\rightsquigarrow$ matrix på echelonform
   1. Er højresiden en Pivotsøjle (er der en ledende koefficient i sidste søjle)? Systemet er inkonsistent. Stop!
   2. Ellers er systemet konsistent. Fortsæt!
3. Rækkereduktion $\rightsquigarrow$ matrix på reduceret echelonform.
4. Overfør denne sidste matrix til et (ækvivalent) ligningssystem
5. Isoler bundne variable $\rightsquigarrow$ parameterfremstilling med de frie variable som parametre

Rang og nullitet

Givet en $m \times n$-matrix A med rækkeækvivalent matrix R på reduceret række echelonform.

Definition

1. As rang $rank(A)$: Antal Pivotsøjler i R – og dermed i A.
2. As nullitet (eller defekt) $nullity(A)$: Antal søjjler uden Pivot.

Sumformel

$$rank(A) + nullity(A) = n.$$

(Variablene er enten bundne eller fri!)