Lineær algebra: Skift af basis og koordinater. Matrixbeskrivelse af lineære afbildninger

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Koordinater
med hensyn til en basis

Definition

For et underrum $W \leq \mathbf{R}^n$ med basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ har hver vektor $\mathbf{v} \in W$ en entydig beskrivelse

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots c_p\mathbf{b}_p.$$

og kan dermed beskrives ved sin koordinatvektor $[\mathbf{v}]_\mathbf{B}$ med hensyn til $\mathcal{B}$:

$$[\mathbf{v}]_\mathbf{B} = [c_1 \ldots c_p]^T \in \mathbf{R}^p.$$

Beregning af koordinater mht. $\mathcal{B}$

$\mathcal{B} \rightsquigarrow (n \times p)$-matrix $B = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p]$ med basisvektorer som søjler.

Theorem

- $\mathbf{v} = B[\mathbf{v}]_\mathbf{B}$.
- *Hvis $p = n$, så er B regulær og $[\mathbf{v}]_\mathbf{B} = B^{-1}\mathbf{v}$.*

Koordinatskiftematrix B^{-1} er invers til basisskiftematrix B.

Anvendelse

Beskrivelse af keglesnit med udgangspunkt i keglesnittets symmetriakser.

Repræsentation af lineære operatorer

Definition

En lineær operator er en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Matrix beskrivelse af lineær operator med hensyn til basis $\mathcal{B}$

Matrix repræsentationen af en lineær operator $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ med hensyn til en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ for $\mathbf{R}^n$ er givet ved

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}\ \cdots [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}] \\ &= B^{-1}[T(\mathbf{b}_1)\ T(\mathbf{b}_2)\ \cdots T(\mathbf{b}_n)]. \end{aligned}$$

Dette sikrer: $[T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$.

Beregning

Højresiden af den reducerede echelonmatrix svarende til

$$[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_n | T(\mathbf{b}_1)\ T(\mathbf{b}_2)\ \cdots\ T(\mathbf{b}_n)]$$

Standardmatrix $\leftrightarrow$ Matrix med hensyn til basis $\mathcal{B}$

Theorem

Givet en lineær operator $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ og en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ for $\mathbf{R}^n$ svarende til basisskiftematrix $B = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$. Så gælder:

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB.$$

Forklarende diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B^{-1}"] & A\mathbf{x} & \text{standard koordinater} \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{x}} \arrow[r, "B^{-1}AB"] & {[A\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (B^{-1}A)\mathbf{x}} \arrow[u, "B"] & \mathcal{B} - \text{koordinater}
\end{tikzcd}$$

Definition

To $(n \times n)$-matricer A, C er similære hvis der findes en regulær $(n \times n)$-matrix B således at $C = B^{-1}AB$.