Lineær algebra: Egenværdier, egenvektorer, diagonalisering

Martin Raussen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

2011

Egenvektorer og egenværdier
Definition

Mål:

Forståelse af afbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ fra $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ for en $n \times n$-matrix A.

Definition

- En egenvektor for A er en vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ således at $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ for et reelt tal λ.
  Dette tal λ kaldes egenværdi hørende til $\mathbf{x}$.
- Givet en egenværdi $\lambda \in \mathbf{R}$. Mængden af alle vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ med $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ danner et underrum $E_\lambda \leq \mathbf{R}^n$, egenrummet hørende til λ. Det indeholder, udover alle egenvektorer til egenværdien λ, også nulvektoren $\mathbf{0}$.

Egenrum som nulrum

For en given egenværdi $\lambda \in \mathbf{R}$ stemmer egenrummet E_λ overens med nulrummet $Nul(A - \lambda I)$ for matricen $A - \lambda I$:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Egenværdier og matrixligninger

For hvilke reelle tal $\lambda \in \mathbf{R}$ har ligningen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ en ikke-triviel løsning $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}$? $\Leftrightarrow$ For hvilke reelle tal $\lambda \in \mathbf{R}$ har ligningen $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en ikke-triviel løsning $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}$?

Ækvivalente betingelser:

- $A - \lambda I$ er singulær (dvs. ikke invertibel)
- $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definition

- For en $n \times n$ matrix A kaldes polynomiet (grad = n) $p_A(t) = \det(A - tI)$ matricens karakteristiske polynomium. De reelle rødder λ i det karakteristiske polynomium svarer til matricens egenværdier.
- Givet en egenværdi λ. Dens algebraiske multiplicitet svarer til multipliciteten af denne rod i $p_A(t)$, dvs. den højeste potens r således at $(t - \lambda)^r$ går op i $p_A(t)$.

Definition

- To $n \times n$-matricer A, B kaldes similære (eng.: similar) hvis der findes en invertibel $n \times n$-matrix P således at $A = PBP^{-1}$.
- En $n \times n$-matrix A kan diagonaliseres hvis den er similær til en diagonalmatrix D (med 0er udenfor diagonalen): $A = PDP^{-1}$, $D = P^{-1}AP$.

Diagonalmatricer

For en diagonalmatrix D gælder:

egenvektorer: standard enhedsvektorer $\mathbf{e}_i$

egenværdier: diagonalkoefficienter d_{ii}

Hvad har similære matricer til fælles?

Karakteristisk polynomium, egenværdier og deres multipliciteter

Theorem

For similære matricer A, B gælder:

1. *De har det* ***samme karakteristiske polynomium*** *($\rightsquigarrow$ samme egenværdier, med samme algebraiske multiplicitet).*
2. *$E_\lambda(A) = P(E_\lambda(B))$. Egenrum har* ***samme dimension!***

Bevis.

1. $\det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda I) = \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = \det P \det(B - \lambda I) \det P^{-1} = \det(B - \lambda I) = p_B(\lambda)$.
2. $B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow AP\mathbf{v} = PBP^{-1}P\mathbf{v} = PB\mathbf{v} = \lambda P\mathbf{v}$.

$\square$

Hvornår kan en matrix diagonaliseres?
og hvordan?

Theorem

En $n \times n$-matrix A kan diagonaliseres hvis og kun hvis der findes en egenvektorbasis for A, dvs. en basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for $\mathbf{R}^n$ bestående af egenvektorer.

Metode:

1. Bestem As egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – med multiplicitet; de er ikke nødvendigvis alle forskellige.
2. Bestem en egenvektorbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$: $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$
3. $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$ $\leftarrow$ basisegenvektorer som søjler
4. $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ $\leftarrow$ egenværdier på diagonalen. Samme rækkefølge!

Theorem

Givet en $n \times n$-matrix A med n forskellige reelle egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

- *Tilhørende egenvektorer – $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ – danner en egenvektorbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.*
- *A kan diagonaliseres.*

Drejninger – spejlinger

- En 2×2 rotationsmatrix har ingen egenværdier/vektorer (med mindre drejningsvinklen er 0 eller π).
- En 3×3 rotations.matrix har alle vektorer på aksen som egenvektorer (egenværdi 1) og ikke andre (med mindre drejningsvinklen er 0 eller π).
- Spejlingsmatricer?

Hvornår kan en matrix diagonaliseres?
Et præcist kriterium

Givet en $n \times n$-matrix A.

Definition

Egenværdien λ for A har

algebraisk multiplicitet $a_\lambda = k$ hvis k er den største eksponent således at $(t-\lambda)^k$ går op i matricens karakteristiske polynomium $p_A(t)$;

geometrisk multiplicitet g_λ =dim E_λ – dimensionen af egenrummet hørende til λ.

Theorem

1. *For enhver egenværdi λ gælder: $g_\lambda \leq a_\lambda$.*
2. *A er diagonaliserbar hvis og kun hvis*
   1. *$\sum a_\lambda = n$ – antallet af (reelle) egenværdier talt med deres algebraiske multiplicitet.*
   2. *For enhver egenværdi λ gælder: $g_\lambda = a_\lambda$.*