Differentiationsregler

Theorem

Lad $f, g : I \to \mathbf{R}$ være funktioner på et interval I som indeholder a i sit indre. Hvis f, g begge er differentiable i a, så er også funktionerne $f + g$, αf (for $\alpha \in \mathbf{R}$), fg differentiable i a; ligeledes $\frac{f}{g}$, hvis defineret og $g'(a) \neq 0$.

Der gælder følgende regler:

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
3. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

1. og 2.: Differentiation er lineær.

1., 2. og 3.: Differentiation er en derivation.

Bemærk: Polynomier $p(x)$ og rationale funktioner $\frac{p(x)}{q(x)}$ er differentiable.

Kæderegel

Theorem

Lad $f : I \to \mathbf{R}, g : J \to \mathbf{R}$ være funktioner på intervaller I, J, a i Is indre og $f(a)$ i Js indre.
Hvis f er differentiabel i a og g er differentiabel i $f(a)$, så er sammensætningen = kompositionen $g \circ f$ differentiabel i a og

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Interpretation: Den bedste lineære approksimation til sammensætningen er givet ved sammensætningen af de bedste lineære approksimationer til dem hver især.
Korollar: Hvis $f : I \to J$ er differentiabel og har en differentiabel invers f^{-1}:$J \to I$, så gælder:

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$